

از آموزش و ریاضی، تا آموزش ریاضی

اف. فورینگتی، جی. ام. ماتوس، و ام. منگینی

برگردان: زهرا گویا و امیرحسین آشنا

چکیده

در این فصل تاریخ گسترش آموزش ریاضی را از وضعیت آغازی آن که یکی از حوزه‌های کاری ریاضی‌دانان به‌شمار می‌رفت تا تولد آن به‌عنوان یک حوزه علمی و پژوهشی مستقل، مرور می‌کنیم. در این مقاله نقش ارتباطات ریاضی^۵ از طریق رشد مجله‌ها و کنفرانس‌های پژوهشی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. اقدامات انجام شده برای جلب همکاری‌های بین‌المللی در مواجهه با مسائل مربوط به تدریس و آموزش ریاضی، با ارجاع به مجله تدریس ریاضی^۶ و ICMI بررسی می‌شود. در این بررسی اصلاحات برنامه‌های درسی و روشی که باعث ایجاد تغییرات در ریاضیات مدرسه‌ای در قرن بیستم شد، در نظر گرفته شده است. با پذیرش این مطلب که پژوهش در آموزش ریاضی چیزی بیش از تمرکز سنتی بر بحث درباره گزینه‌های مختلف برای برنامه‌های درسی در سطوح مختلف است، چند خوشه تخصصی را شناسایی و مباحث خاص مربوط به آموزش ریاضی را در سطح جهانی مطرح کرده‌ایم. سپس این خوشه‌ها را در سه حوزه اصلی گروه‌بندی کرده‌ایم. این سه حوزه عبارت‌اند از روان‌شناسی، مطالعات اجتماعی، فرهنگی و سیاسی و تناسب نظریه ارائه شده برای آموزش ریاضی.

^۱ این مقاله ترجمه فصل ۹ کتاب سومین دانشنامه جهانی آموزش ریاضی است.

Third International Handbook of Mathematics Education, Chapter 9, M. A. Clements & el., Springer, 2013

^۲Fulvia Furinghetti ^۳Jose Manuel Matos ^۴Marta Menghini ^۵ Mathematical Communication

^۶ L' Enseignement Mathematique

۱. مقدمه

در این فصل به سیر تحول آموزش ریاضی از وضعیت آغازی آن به عنوان امری خطیر که غالباً تحت نظارت ریاضی دانان بوده است، تا تولد آن به مثابه حوزه‌ای علمی پژوهشی می‌پردازیم. داستان خود را از قرن نوزدهم آغاز می‌کنیم، یعنی زمانی که دولت‌های قدیم به سازماندهی جدیدی دست یافتند، دولت‌های جدید اداره امور را در دست گرفتند و لازم بود که نظام‌های آموزشی به‌روز شده یا از نو ایجاد شوند. در این داستان، پژوهشگران در حوزه‌های متعدد (روان‌شناسی، فلسفه، پزشکی، جامعه‌شناسی، زبان‌شناسی، انسان‌شناسی و غیره) نقش داشته‌اند اما بازیگران اصلی ریاضی دانان حرفه‌ای و معلمان ریاضی بوده‌اند. این گذار، طی مسیری طولانی صورت گرفته و به شفاف شدن رابطه بین ریاضی دانان و معلمان ریاضی و در نتیجه استقلال آموزشگران ریاضی از ریاضی دانان انجامیده است. این استقلال رسماً از طریق برگزاری انتخابات جدید برای کمیته اجرایی «کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی»^۱ (ICMI) به رسمیت شناخته شد و این مصوبه در Compostela de Santiago (۲۰-۱۹ آگوست ۲۰۰۶)، توسط مجمع عمومی «اتحادیه جهانی ریاضی»^۲ (IMU) صورت گرفت و از آن پس، انتخابات کمیته اجرایی ICMI از مجمع عمومی IMU به مجمع عمومی ICMI منتقل شد [۴۸].

به‌منظور شرح تفصیلی گام‌های برداشته شده در این مسیر، بر نکات مهم زیر تمرکز خواهیم کرد:

- پیشرفت ناشی از آموزش ریاضی در سطح جهانی در آغاز قرن بیستم از طریق مجله تدریس ریاضی و کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی؛
- اصلاحات/ تغییرات برنامه درسی ریاضی؛
- ابتکارات مستقل ناشی از رویکرد جدید به آموزش ریاضی که آن را به رشته‌ای دانشگاهی و یک حوزه پژوهشی جدید تبدیل کرد.

از آنجا که شکل‌گیری این رشته جدید تحت تأثیر تعامل با حوزه‌های دیگر بوده است، خلاصه‌ای از اثرگذارترین تعامل‌ها را ارائه می‌کنیم. جنبش ارتباطات، جهانی‌شدن و همبستگی در آغاز قرن بیستم، جنبه‌ای بین‌المللی به آموزش ریاضی داد و کشورهای متعددی از سراسر جهان در این رخداد دخیل بودند. اما چون بیشتر رویدادها و افراد سهم در ایجاد، توسعه و تبدیل آموزش ریاضی به رشته‌ای دانشگاهی متعلق به اروپا و آمریکای شمالی بودند، تاریخی که بررسی کرده‌ایم عمدتاً به این دو منطقه مربوط می‌شود. بحث درباره دیگر مسیرهای گسترش آموزش ریاضی پیش و پس از استقلال از ریاضی دانان و عطف توجه به مناطق دیگر جهان، در فصل دیگری از این دانشنامه آمده است.

^۱International Commission on Mathematical Instruction ^۲International Mathematical Union

آغاز آموزش ریاضی با پیدایش بشر همزمان بوده است. تمدن‌های باستان، اسنادی برایمان باقی گذاشته‌اند که گواه درهم‌تنیدگی بین توسعه فرهنگ ریاضی و مسائل مربوط به انتقال این فرهنگ است [۵۳، ۵۶]. در عرصه پهناور رویدادهای اجتماعی، اقتصادی و سیاسی که همراه با تحول آموزش ریاضی بوده‌اند، دو پیشرفت مهم و اثرگذار را مطرح می‌کنیم. اول اختراع صنعت چاپ در قرن پانزدهم است که امکان سواد جهانی و انتقال آسان دانش ریاضی را به افراد بیشتری فراهم آورد. طی چند قرن بعد، این امر باعث پیشرفت دیگری شد: ایجاد مدارس برای آموزش همگانی. در نتیجه، ریاضی که ۶۰۰ سال قبل موضوعی اسرارآمیز بود، به موضوعی بدل شد که عملاً تمام دانش‌آموزان جهان آن را مطالعه می‌کردند.

قرن‌ها، نقش معلمان ریاضی و پژوهشگران ریاضی به میزان زیادی همپوشانی داشت. به تدریج که موضوعات ریاضی پیشرفته شدند، این همپوشانی به استادان ریاضی در دانشگاه‌ها منتقل شد که پژوهش را به‌عنوان بخشی از حرفه خود، انجام می‌دادند. با این حال در مدارس ابتدایی و متوسطه، تفکیک بین آموزش ریاضی و پژوهش در ریاضی آشکارتر شد و این تمایز به تنوع در تولید مقالات و نوشته‌ها در زمینه ریاضی انجامید. از یک سو کتاب‌های درسی که هدفشان به‌طور خاص آموزش ریاضی مدرسه‌ای بود، منتشر می‌شدند و از سوی دیگر گزارش‌های نتایج جدید پژوهش در ریاضی. به گفته استروویک [۹۲] فرآیند حرفه‌ای شدن پژوهشگران ریاضی، به‌واسطه پژوهش‌های علمی در سال‌های انقلاب صنعتی شتاب زیادی گرفت. انقلابی که باعث شکل‌گیری «طبقات اجتماعی جدید با دیدگاهی جدید نسبت به زندگی و علاقه‌مند به علم و آموزش‌های فنی- حرفه‌ای» شد (ص. ۱۴۱). در این بین، دیدگاه‌های دموکراتیک نوین که نشأت گرفته از انقلاب فرانسه بود، «به زندگی آکادمیک حمله کرد؛ نقدهایی علیه طرز تفکر منسوخ‌شده مطرح شد؛ مدارس و دانشگاه‌ها باید اصلاح و نوسازی می‌شدند» (ص. ۱۴۲).

در قرن نوزدهم، «مشغله اصلی ریاضی‌دانان تنها عضویت در فرهنگستان‌های علمی نبود، آن‌ها معمولاً در استخدام دانشگاه‌ها یا مدارس فنی بودند و در کنار حرفه تدریس، پژوهش نیز می‌کردند» (ص. ۱۴۲).

تقریباً در اواسط قرن نوزدهم حرفه معلمی ریاضی در سطح ابتدایی و متوسطه، شکل تازه‌ای به خود گرفت که نه تنها به نوگرایی ملت‌ها ربط داشت بلکه با ظهور و بروز اتفاقات اجتماعی جدید نیز در ارتباط بود که به تدریج در قالب انجمن‌ها و اتحادیه‌های کارگری جدید، جنبش‌های سیاسی و اجتماعی و اقداماتی جهت همبستگی نمود می‌یافتند. حال دیگر انتقال دانش ریاضی، مسئله‌ای خصوصی و بر عهده خانواده‌ها یا گروه‌های مذهبی نبود بلکه به کاری عمومی و جزو مسئولیت دولت‌ها تبدیل شده بود. در سال‌های بعد، تأسیس نظام‌های ملی آموزشی جدید در کشورهای جدید و قدیمی آغاز شد. مسئله اصلی در این فرآیند، تولید برنامه‌های درسی، تهیه کتاب‌های درسی مناسب و حل مشکلات مربوط به آموزش

و استخدام معلمان بود. مدت کوتاهی پس از این همه اتفاقات، ضرورت تأمل بر مشکلات ذاتی این ساختار کلی موجب پدید آمدن مجله‌ها و اتحادیه‌های ویژه شد. در چنین شرایطی است که داستان ما در مورد گذار از «آموزش و ریاضی» به «آموزش ریاضی» آغاز می‌شود.

۲. ارتباطات ریاضی

ریاضی‌دانان مانند تمام دانشمندان، همیشه به انتقال نتایج پژوهش‌های خود احساس نیاز کرده‌اند. آن‌ها برای دستیابی به این هدف، مدت‌های طولانی بر ارتباطات خصوصی خود با ریاضی‌دانان دیگر متکی بودند، اما پس از تأسیس فرهنگستان‌ها و انجمن‌ها، به تدریج به تدوین و انتشار گزارش فعالیت‌های علمی خود پرداختند. در پی تغییرات ایجاد شده در محیط‌های فرهنگی و اجتماعی که نتیجه انقلاب صنعتی و انقلاب فرانسه بود، ابزارهای ارتباطی جدیدی ایجاد شد و اولین مجله‌های تخصصی ریاضی پدید آمدند. این مجله‌ها در ابتدا دوامی نداشتند یا این که مانند *مجله سالنامه ریاضی محض و کاربردی*^۱ در فرانسه تنها چند دهه دوام آوردند (۱۸۱۰-۱۸۳۲). اما به زودی نشریه‌های دوره‌ای مهمی منتشر شدند که برخی از آن‌ها هنوز هم منتشر می‌شوند. برای مثال در سال ۱۸۲۶ *مجله نشریه‌ای در باب ریاضی محض و کاربردی*^۲ به همت آگوست لئوپلد کریل^۳ و در سال ۱۸۳۶، *مجله ریاضی محض و کاربردی*^۴ توسط ژوزف لیوویل^۵ منتشر گشت. این مجله‌ها و انواع مشابه آن‌ها که در آن زمان در دسترس بودند، نه تنها حاوی مقالات پژوهشی اصیل بودند بلکه یادداشت‌های مستخرج از آثار برجسته ریاضی و چکیده‌های مقالات مهم را نیز شامل می‌شدند و از این طریق یعنی با ارائه نتایج جدید و آثار مهم که به راحتی در دسترس همه خوانندگان (از جمله پژوهشگران تازه‌کار) قرار می‌گرفت، در پیشرفت ریاضی سهم شدند. این مجله‌ها عمده‌تاً پژوهشی بودند و خوانندگان بین‌المللی داشتند. حدوداً در اواسط قرن نوزدهم، نوع دیگری از مجله که معمولاً به آن *مجله بینابینی*^۶ (واسط)^۷ اطلاق می‌شد، پدید آمد که محتوای این گونه مجله‌ها مربوط به ریاضیات دوره متوسطه و دانشگاهی بود. برای مثال، بین سال‌های ۱۸۷۷ تا ۱۸۸۱ *مجله ریاضی مقدماتی و ویژه*^۸ (به سردبیری جاستین بورگت^۹) منتشر شد و در سال ۱۸۸۲ به *مجله ریاضیات ویژه*^{۱۰} (به سردبیری گاستون آلبرت گوهریر دو لانچامپ^{۱۱}) تغییر نام داد. مخاطب برخی از این مجله‌های بینابینی صرفاً معلمان و دانش‌آموزان ریاضی بودند که برای ورود به مدارس خاص آماده^۷ منظور از این واژه، رتبه‌بندی مجله نیست، بلکه شأنیت و مأموریت مجله است.

^۱Annales de Mathematiques Pures et Appliquees ^۲Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik

^۳August Leopold Crelle ^۴Journal de Mathematiques Pures et Appliquees ^۵Joseph Liouville

^۶Intermediate Journal ^۸Journal de Mathématiques Élémentaires [et Spéciales] ^۹Justin Burget

^{۱۰}Journal de Mathématiques Spéciales ^{۱۱}Gaston Albert Gohierre de Longchamps

می‌شدند و محتوای ریاضی مقالات چاپ‌شده در آن‌ها در سطحی بین دبیرستان و دانشگاه قرار داشت. پیشتر در بریتانیا، مجلات دوره‌ای نظیر *روزنامه بانوان*^۱ یا *سالنامه بانوان*^۲ که شماره اول آن در سال ۱۷۰۴ منتشر شد و تایمز آموزشی^۳ که از ۱۸۴۷ تا ۱۹۲۹ منتشر می‌شد، هر یک به نحوی در رشد دانش ریاضی سهم داشتند و این کار را از طریق طرح پرسش‌های ریاضی برای خوانندگان غیرحرفه‌ای انجام می‌دادند. مجله تایمز آموزشی که با مرکز تربیت معلم در ارتباط بود (۱۸۴۹)، محصول انجمن معلمان ریاضی بود (۱۸۴۶). این انجمن برای بهبود استانداردهای آموزش مدارس متوسطه تأسیس شده بود و به گفته هاوزون [۵۲] «ابتدا معلومات لازم را در اختیار معلمان و دانش‌آموزان قرار می‌داد» (ص. ۴۳). نشریه «مسائل و راه‌حل‌های ریاضی از تایمز آموزشی» از این مجله نشأت گرفت و بین سال‌های ۱۸۶۴ تا ۱۹۱۸ منتشر می‌شد (به سردبیری ویلیام جان کلارک میلر^۴).

در دنیای رنگارنگ مجله‌هایی با ماهیت‌های مختلف که در قرن نوزدهم پدید آمدند، شناسایی مجله‌هایی که به‌طور خاص به آموزش ریاضی دوره متوسطه بپردازند، دشوار است. در واقع نشانه‌ای که از آن می‌شد فهمید محتوای یک مجله معطوف به ریاضیات دوره متوسطه است، واژه «مقدماتی» در عنوان این مجله‌ها بود؛ اگرچه معنای این اصطلاح هم در مجله‌های مختلف، متفاوت بود. نمونه‌های این نوع مجلات، سه نشریه فرانسوی با عنوان‌های *مجله ریاضی مقدماتی*^۵ (به سردبیری هنری ووبرت^۶، انتشار در سال ۱۸۷۶)، *مجله ایتالیایی ریاضی مقدماتی* (به سردبیری لانچامپ، انتشار در سال ۱۸۸۲)، *آموزش ریاضی*^۷ (سردبیران ژان گریس^۸ و هنری ووبرت، انتشار در سال ۱۸۹۸)، و *مجله ایتالیایی ریاضی مقدماتی*^۹ (به سردبیری جیووانی ماسا^{۱۰}، تاریخ شروع سال ۱۸۷۴) بودند. گاهی مدیران مسئول و سردبیران این مجله‌ها، معلمان مدارس بودند و به‌طور مشخص، اغلب نویسندگان *مجله ایتالیایی ریاضی* در ایتالیا معلمان مدارس دوره متوسطه بودند. تاریخ انتشار این مجله‌ها نشان می‌دهد که مجله‌های مربوط به آموزش ریاضی در سطح متوسطه دیرتر از مجله‌های پژوهشی ریاضی متولد شدند. البته این تأخیر قابل توجیه است زیرا معلمان ابتدایی و متوسطه که در زمان تأسیس نظام‌های آموزشی در کشورهای مختلف، در تدارک حرفه‌ای‌گری و هویت‌سازی برای خود بودند، خوانندگان اصلی این نوع مجله‌ها بودند.

پدید آمدن مجله‌های مختص آموزش ریاضی اغلب با همکاری انجمن‌های معلمان ریاضی بود و در برخی موارد برعکس، مجلات دوره‌ای سبب تأسیس انجمن‌های حرفه‌ای می‌شدند. برای مثال، در سال ۱۹۱۵ در ایالات متحده آمریکا، MAA (جامعه ریاضی آمریکا^{۱۱}) مسئولیت ماهنامه آمریکایی ریاضی^{۱۲}

^۱ The Ladies' Diary ^۲ Woman's Almanack ^۳ The Educational Times ^۴ William John Clarke Miller

^۵ Journal de Mathématiques Élémentaires ^۶ Henri Vuibert ^۷ L'Éducation Mathématique ^۸ Jean

Griess ^۹ Rivista di Matematica Elementare ^{۱۰} Giovanni Massa ^{۱۱} Mathematical Association of

America ^{۱۲} American Mathematical Monthly

را به عهده گرفت که مخاطباننش معلمان ریاضی بودند و از سال ۱۸۹۴ به طور خصوصی منتشر می‌شد. علاوه بر این انجمن معلمان ریاضی ایالت‌های میامی و مریلند، انتشار فصل‌نامه‌ای با نام «معلم ریاضی»^۱ را در سپتامبر ۱۹۰۸ آغاز کرد که همزمان با تأسیس «شورای ملی معلمان ریاضی»^۲ (NCTM) در سال ۱۹۲۰، به‌عنوان مجله رسمی این شورا انتخاب شد.

در ایتالیا مجله فصل‌نامه ریاضی^۳ در سال ۱۸۸۶ تأسیس و به ارگان رسمی انجمن ملی معلمان ریاضی و علوم ریاضی ایتالیا تبدیل شد. در موارد دیگری نیز تأسیس انجمن معلمان ریاضی به انتشار مجله‌های جدید با هدف پخش اطلاعات و ایده‌های نو منتهی شد. مثلاً در سال ۱۸۹۱ در آلمان انجمن حمایت از آموزش علوم و ریاضی آلمان^۴ تأسیس و به‌دنبال آن مجله راهنمای آموزش ریاضی و علوم^۵ در سال ۱۸۹۵ منتشر گشت. در بریتانیا انجمن بهبود آموزش هندسه^۶ (AIGT) که در سال ۱۸۷۱ تأسیس شده بود، در سال ۱۸۹۷ به انجمن ریاضی تبدیل شد. این انجمن به انتشار مجله The Mathematical Gazette که چاپ آن از سال ۱۸۹۴ آغاز شده بود، ادامه داد. در فرانسه، APMEP (انجمن معلمان ریاضی در آموزش عمومی^۷) فعالیت‌ها و انتشار بولتن خود را در سال ۱۹۱۰ آغاز کرد.

ایجاد ارتباطات از طریق مجله‌های مختص ریاضی (و گاهی همراه با علوم دیگر) با رشد جامعه ریاضی‌دانان و سپس آموزشگران ریاضی همراه شد. فهرست برخی از ۱۸۲ فصل‌نامه ریاضی در کاتالوگی که توسط انجمن ریاضی در بریتانیا (۱۹۱۳) تهیه شده بود هنوز هم موجود است و بسیاری از موارد جدید نیز باید به آن اضافه شود. بعضی از این مجله‌ها پژوهشی بودند و برخی هم به آموزش ریاضی می‌پرداختند که مجلات مربوط به آموزش ریاضی در قرن بیستم رشد قابل توجهی پیدا کردند به طوری که در فهرست گردآوری شده توسط شوبرینگ^۸ و ریشتر^۹ [۸۰] ۲۵۳ عنوان به چشم می‌خورد و برخی از آن‌ها در [۴۶] و [۴۷] مورد بررسی قرار گرفتند.

همان‌طور که اشاره کردیم در دهه‌های قبل از سال ۱۹۰۰، مهم‌ترین انجمن‌های ملی معلمان ریاضی تأسیس شدند. این انجمن‌ها و مجله‌هایشان به ارتقای ارتباط و شکل دادن به هویت معلمان ریاضی کمک زیادی کردند. نقش این انجمن‌ها به‌طور خاص، به‌لحاظ ایجاد انگیزه و هدایت اصلاحات صورت گرفته در آن دوره حائز اهمیت بود. این اصلاحات، در راستای به‌روزرسانی ریاضی مدرسه‌ای همسو با روندهای

^۱The Mathematics Teacher ^۲National Council of Teachers of Mathematics ^۳Periodico di Matematica

^۴Deutscher Verein zur Förderung des Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterrichts

^۵Unterrichtsbblätter für Mathematik und Naturwissenschaften ^۶Association for Improvement of

Geometrical Teaching ^۷Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

^۸Schubring ^۹Richter

جدید پژوهشی و به منظور تولید برنامه‌های درسی ریاضی متناسب با نیازمندی‌های عصر نوآوری صنعتی و فناورانه بود. طبق مشاهدات نابوناند^۱ [۶۸]، درست است که روح اصلاحات اغلب با شخصیت‌های قدرتمندی نظیر جان پری^۲ در بریتانیا، فلیکس کلاین^۳ در آلمان، و چارلز امیل ارنست کارلو بورله^۴ در فرانسه تجسم یافت، اما برنامه‌های اصلاحات که با همکاری اتحادیه‌های معلمان به‌عنوان نقش‌آفرینان مهم مورد بحث قرار گرفت، اجرا شد و منتشر گشت.

در ایالات متحده آمریکا، انجمن ریاضی آمریکا^۵ (AMS) در سال ۱۸۸۸ تأسیس شد و تأکید همیشگی آن بر پژوهش (در دوره‌های بعد از متوسطه) بوده و هست. الیاکین هستینگز مور^۶ در سخنرانی‌ای که به‌عنوان رئیس AMS در سال ۱۹۰۲ ارائه نمود، از عقاید پری دفاع کرد، (مور ۱۹۰۳) این خشم بسیاری از اعضای AMS را برانگیخت. در بریتانیا انجمن بهبود آموزش هندسه (AIGT) و بعدها انجمن ریاضی، با هدف حمایت از اصلاحات در برنامه درسی هندسه متولد شد. در سوئیس به پیشنهاد جامعه معلمان ریاضی، برنامه‌های جدیدی برای تعریف نموداری توابع مطرح شدند. در سال ۱۹۰۶ پس از سخنرانی امانوئل بیک^۷ در نشست سالانه انجمن معلمان مجارستان، کمیسیونی مسئول مطالعه اصلاحات و تغییرات کلی آموزش ریاضی متوسطه توسط همان انجمن شد و بیک را به‌عنوان اولین رئیس خود منصوب نمود. گاهی که تدریس ریاضی به موضوعی حاشیه‌ای تبدیل شده است، نقش مهم انجمن‌های معلمان در دفاع از آموزش ریاضی، مشهود بوده است. برای مثال در ایتالیا هدف انجمن معلمان ریاضی Mathesis که در سال ۱۸۹۵ تأسیس شد، حمایت از تدریس ریاضی در مقابل افول آن بود که از دهه ۱۸۹۰ آغاز شده بود. علاوه بر این انجمن‌ها که اغلب‌شان هنوز هم به حیات خود ادامه می‌دهند و کاملاً سرپا هستند، انجمن‌های جدیدی نیز تأسیس شده‌اند و بسیاری از آن‌ها مجله، بولتن و خبرنامه منتشر و نشست‌های ملی و فعالیت‌های دیگر را سازماندهی می‌کنند.

اغلب، هم معلمان و هم ریاضی‌دانان حرفه‌ای در این فعالیت‌های ابتکاری مشارکت داشتند. ابتکارهایی هم بود که معلمان دوره متوسطه به‌تنهایی آن‌ها را سروسامان دادند؛ این اتفاق برای مثال در ایتالیا، در دوره آغازین انجمن‌های معلمان رخ داد. مورد دیگر را می‌توان در فرانسه مثال زد که در آن ریاضی‌دانان دانشگاهی این ابتکارات را به‌دست گرفتند و جنبش‌های اصلاحی را هدایت کردند. مشکل رابطه بین این دو گروه (ریاضی‌دانان و معلمان ریاضی) و نیاز به تقسیم مسئولیت‌ها و اختیارات، همیشه در دورنمای توسعه آموزش ریاضی و تبدیل آن به یک رشته دانشگاهی، دخیل بوده است.

^۱Nabonnand ^۲John Perry ^۳Felix Klein ^۴Charles E'mile Ernest Carlo Bourlet ^۵American Mathematical Society ^۶Eliakin Hastings Moor ^۷Emanuel Beke

۳. آموزش ریاضی بدون مرز

مجله‌های ملی و انجمن‌های معلمان در بسیاری از کشورها، به ابزار مهمی در انتشار ایده‌ها و اطلاعات بین معلمان تبدیل شدند و اهمیت حیاتی خود را در شکل دادن به هویت معلمان ریاضی اثبات کردند. همچنین با توجه به این که مضمون‌های مطرح شده در آن‌ها بیشتر مربوط به نظام‌های آموزشی ملی در کشورها بود و خوانندگان آن‌ها را نیز همان معلمان تشکیل می‌دادند، تعجبی ندارد که اغلب همکاران و حامیان آن‌ها، از همان کشور بودند و اقدامات انجمن‌های معلمان عمدتاً محدود به پرداختن به مشکلات ملی می‌شد. در مجله‌هایی که به آموزش ریاضی اختصاص داشتند، مشارکت مؤلفان خارجی بسیار اندک بود و عموماً نوشته‌های ایشان به زبان‌های محلی ترجمه می‌شد. با وجود ملی بودن بسیاری از این مجلات و انجمن‌ها و پرداختن به مسائل بومی هر کشور، می‌توانیم با تأمل بر مشکلات تدریس ریاضی در آغاز قرن بیستم، برخی زمینه‌های مشترک را شناسایی کنیم. اکثر بحث‌های مربوط به سازمان‌دهی برنامه درسی بر سه مضمون اصلی استوار بود:

- رابطه بین بخش‌های برنامه‌ها؛
- دقت در مقابل شهود؛
- رابطه بین ریاضی و رشته‌های دیگر علمی.

در این بین، نیاز به فراتر رفتن از مباحث مربوط به سازمان‌دهی مجدد برنامه‌های درسی آشکار شد و تشخیص داده شد که لازم است روش‌های جدید تدریس با ملاحظات زیر در نظر گرفته شوند:

- «رویکردهای عملی به تدریس» مبتنی بر مشاهده، آزمایش و آزمایشگاه؛
- یافته‌های تازه در مورد رشد فکری کودکان؛
- تمرکز بر کاربردها.

به دلیل وجود ویژگی‌های مشترک متعدد بین مسائل آموزش ریاضی در کشورهای مختلف و پذیرفتن مزایای محتمل همکاری‌های بین‌المللی، حرکت‌هایی در راستای رسیدن به حل مشکلات مربوط به تدریس و سایر مسائل آموزشی ایجاد شد. در ادامه به تشریح دو ابتکار اصلی خواهیم پرداخت که به میزان زیادی در جریان این جهانی شدن^۱ سهم بودند.

^۱Internationalism

۴. مجله تدریس ریاضی^۱

در نیمه دوم قرن نوزدهم، اندیشه جهانی شدن در بسیاری از وجوه جامعه جریان داشت. سرعت حمل و نقل در حال افزایش بود و پیشرفت‌های فناوری، ارتباط راه دور را تسهیل می‌کردند. در چنین شرایطی ظهور ایده برگزاری جشنواره‌ها و نمایشگاه‌های جهانی تعجبی نداشت؛ جایی که امکان نمایش تولیدات صنعتی و فناوری‌های جدید و تبادل دیدگاه‌ها و پروژه‌ها فراهم می‌شد. اولین نمایشگاه جهانی در لندن (۱۸۵۱) برگزار شد و پس از ۳۰ سال با برپایی نمایشگاه‌هایی در پاریس، وین، فیلادلفیا و ملبورن، ادامه پیدا کرد. اندیشه جهانی شدن به تمام جنبه‌های زندگی از جمله مطالعه و آموزش ریاضی سرایت پیدا کرده بود. با برگزاری کنگره جهانی ریاضی‌دانان در سال ۱۸۹۳ در شیکاگو، سنگ بنای جهانی‌سازی ریاضی و برگزاری همیشگی کنگره‌های جهانی ریاضی‌دانان^۲ (ICM) گذاشته شد (شروع از سال ۱۸۹۷). یکی از مروجان سنت برپایی این کنگره‌ها، ریاضی‌دان فرانسوی چارلز آنگ لازان^۳ بود که دیدگاه فرهنگی او درباره ماهیت ریاضی و آرمان‌های اجتماعی‌اش درباره برادری و همبستگی بین ابناء بشر، مشوق وی برای این کار بود [۳۸].

پس از کنگره پاریس در سال ۱۹۰۰، این کنگره‌ها هر چهار سال یک بار، برگزار شده‌اند (به استثنای وقفه ناشی از دو جنگ جهانی). این نشست‌های منظم، به میزان زیادی به شکل‌گیری هویت جامعه جهانی ریاضی‌دانان پژوهشگر کمک کرد. اتحادیه جهانی ریاضی (IMU) در سال ۱۹۲۰ تأسیس شد و با وجود انحلالش در سال ۱۹۳۲، در سال ۱۹۵۱ مجدداً برقرار و در سال ۱۹۵۲ اولین مجمع عمومی اتحادیه جدید تشکیل شد.

اما به دو دلیل روشن، ایده جهانی شدن، به آسانی قابل انتقال به حوزه آموزش ریاضی نبود: (الف) مسائل آموزشی عمدتاً ملی هستند؛ و (ب) موقعیت معلمان ریاضی با ریاضی‌دانان متفاوت است به ویژه این که معلمان، فرصت‌ها و منابع مالی کمتری برای سفر و برقراری ارتباط با هم دارند. با وجود این مجله تدریس ریاضی در سال ۱۸۹۹ به همت لازان و ریاضی‌دان سوئیسی، هنری فهر^۴ راه‌اندازی شد و بدین ترتیب آموزش ریاضی نیز تحت تأثیر جهانی شدن قرار گرفت. مأموریت و چشم‌انداز این نشریه که در شماره اول از سوی هیأت تحریریه آن اعلام شد، پیوستن آموزش ریاضی به جنبش همبستگی، جهانی شدن و ارتباطات در آن زمان بود.

جهانی بودن مجله تدریس ریاضی، نشانگر تفاوت بین این مجله و دیگر مجله‌هایی بود که به امر تدریس ریاضی می‌پرداختند: این مجله بلافاصله اقدام به چاپ مقالاتی در مورد وضعیت آموزش ریاضی

^۱L'Enseignement Mathématique ^۲International Congresses of Mathematicians ^۳Charles-Angé

در کشورهای مختلف نمود. در بین اعضای هیأت تحریریه مجله، ریاضی‌دانان و تاریخ‌دانان ریاضی به چشم می‌خوردند که پیش از این علاقه خالصانه خود را نسبت به مشکلات تدریس ریاضی (خصوصاً کلاین) و ارتباطات در جامعه ریاضی (به‌ویژه یوستا میتاگ - لفلر^۱ سردبیر مجله Acta Mathematica) ابراز کرده بودند.

سال‌های آغازین و توسعه مجله تدریس ریاضی توسط فورینگتی [۳۴، ۳۷] تشریح شده است. این مجله نه تنها به سبب جهانی بودنش بلکه به علت قلمرویی که ترسیم کرده بود، مجله‌ای خاص تلقی می‌شد. در شماره ششم (۱۹۰۴)، هیأت تحریریه اعلام کردند که از نظر آنان واژه "enseignement" (تدریس) معنای خیلی گسترده‌ای دارد؛ از تدریس به دانش‌آموزان گرفته تا تدریس به معلمان و در واقع یکی از آن‌ها بدون دیگری نمی‌تواند وجود داشته باشد. به همین دلیل، صریحاً هدف خود را برای اختصاص دادن فضایی بیشتر به طرح مسائل فلسفی، روش‌شناختی و تاریخی بیان کردند. از نظر آن‌ها، معلمان باید افق‌های دید خود را فراتر از برنامه کلاس‌های درس و نظام آموزشی کشورشان گسترش می‌دادند.

مجله تدریس ریاضی محصول محیط و جامعه ریاضی بود. اما فهر در ژنو تدریس می‌کرد، یعنی جایی که روان‌شناسان به نام، یعنی ادوارد کلاپارد^۲ و تئودور فلورنوی^۳ در حال فعالیت بودند. آن‌ها از این مجله برای اجرای پرسش‌نامه‌ای استفاده کردند که هدفش بررسی چگونگی تولید محتوای ریاضی توسط ریاضی‌دانان بود. این مطالعه به این دلیل حائز اهمیت بود که به جنبه‌هایی اشاره داشت که صرفاً شناختی نبودند - حوزه‌ای که امروزه به آن حوزه عاطفی گفته می‌شود. از سوی دیگر ریاضی‌دانان پژوهشگری نظیر آنری پوانکاره، مقالاتی در این مجله منتشر کردند که بر جنبه‌های مربوط به ماهیت اکتشاف در ریاضی متمرکز بود.

۵. پیدایش و پیشرفت پروژه‌ای جهانی: ICMI اولیه

در سال ۱۹۰۵، دیوید یوجین اسمیت^۴ مقاله‌ای در مجله تدریس ریاضی منتشر کرد که در آن به حمایت از گسترش همکاری‌های بین‌المللی و تشکیل کمیسیونی در هر کنفرانس جهانی ریاضی پرداخت که هدف آن، مطالعه مسائل و مشکلات تدریس ریاضی در کشورهای مختلف باشد [۸۷]. این مقاله در چهارمین کنگره جهانی ریاضی‌دانان، زمینه را برای تشکیل کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی فراهم نمود (رّم، ۱۹۰۸) و بدین ترتیب، اولین «کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی»^۵ به ریاست فلیکس کلاین، شکل گرفت. این کمیسیون در دهه‌های اول حیاتش با نام CIEM (کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی)^۶ در

^۱Gustaf Mittag-Leffler ^۲Edouard Claparede ^۳Theodore Flournoy ^۴David Eugene Smith

^۵International Commission on the Teaching of Mathematics ^۶Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique in France

فرانسه یا IMUK (کمیسیون جهانی آموزش ریاضی^۱) در آلمان شناخته می‌شد. اگرچه این کمیسیون، از آن زمان تاکنون از نظر جایگاه اجتماعی و چشم‌اندازها دچار دگرگونی‌های زیادی شده است، هنوز هم می‌توان آن را اولین ICMI تلقی نمود.

اهمیت تأسیس ICMI فراتر از ایجاد یک ساختار سازمانی است. نکته‌ی حائز اهمیت این است که ICMI به وجود یک جامعه‌ی جهانی اشاره داشت که کانون اصلی توجه‌اش، تدریس ریاضی بود. با توجه به این که اعضای اولیه‌ی ICMI کشورها بودند و نمایندگان آن کشورها عمدتاً ریاضی‌دانان دانشگاهی بودند، تعجیبی نداشت که فعالیت‌های ICMI برای مدتی طولانی، درون جامعه‌ی ریاضی‌دانان صورت می‌گرفت. طی نشست‌های ICMI این کمیسیون گزارش‌های خود را ارائه می‌کرد و دستوراتی برای فعالیت‌های آتی دریافت می‌نمود [۳۵، ۳۸، ۶۵] در سال‌های نخست، دستاوردهای اصلی ICMI گزارش‌های ملی مربوط به تدریس ریاضی در کشورهای مختلف و تحقیقات بین‌المللی در مورد موضوع‌های مهم درباره‌ی تدریس ریاضی بود. اگرچه بنابر ادعای صریح کلاین [۵۸] ICMI تمام سطوح تدریس ریاضی را به رسمیت می‌شناخت، اما عملاً توجه اصلی به سطوح متوسطه، آموزش بعد از مدرسه^۲ / دانشگاه و آموزش معلمان معطوف بود. توجه به اولویت‌های زیر در فهرست فعالیت‌های صورت گرفته توسط ICMI بین سال‌های ۱۹۰۸ و ۱۹۱۵ مشهود است:

- وضعیت فعلی این سازمان و روش‌های تدریس ریاضی؛
- رویکردهای جدید در تدریس ریاضی؛
- نقش دقت در تدریس ریاضی در سال‌های اول متوسطه و انفجار شاخه‌های متعدد ریاضی؛
- تدریس ریاضی به دانش‌آموزان رشته‌های علوم طبیعی و علوم تجربی؛
- تعلیم ریاضی به فیزیک‌دانان دانشگاهی؛
- شهود و آزمایش در تدریس ریاضی دوره‌ی متوسطه؛
- نتایج به دست آمده درباره‌ی گنجانیدن حساب دیفرانسیل و انتگرال در سال‌های بالاتر دوره‌ی اول متوسطه؛
- جایگاه و نقش ریاضی در آموزش‌های پیشرفته‌ی فنی - حرفه‌ای؛
- تحقیق درباره‌ی آموزش معلمان ریاضی دوره‌ی متوسطه در کشورهای مختلف.

مانند بسیاری از مؤسسات علمی دیگر ICMI نیز طی جنگ جهانی اول متحمل بحرانی عمومی شد و دوره‌ی مابین دو جنگ جهانی، زمان رکود فعالیت‌های ICMI بود [۷۹]. پس از پایان جنگ جهانی دوم،

^۱Internationale Mathematische Unterrichts kommission ^۲Tertiary

اولین مجمع عمومی IMU در سال ۱۹۵۲ در رم برگزار شد و از آن پس ICMI به زیرکمیسیون دائمی IMU تبدیل شد.

با این حال، اوضاع تغییر کرد و در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ دستور کار قدیمی که مبتنی بر تحقیقات و گزارش‌های ملی بود، برای رویارویی با وضعیت جدید، ناکافی به نظر می‌رسید. همچنین به‌منظور رسیدگی مؤثرتر به مشکلات آموزشی، لازم بود که در مورد رابطه با ریاضی‌دانان، تجدیدنظر صورت گیرد.

۶. اصلاحات برنامه درسی در قرن بیستم

۱.۶. اصلاحات در آغاز قرن بیستم. همزمان با تولد ICMI موضوعات مربوط به تولید برنامه‌های درسی، بحث داغ در بسیاری از کشورها شد. این بحث‌ها، نه تنها به مسائل مشترک برنامه درسی ریاضی در کشورهای مختلف می‌پرداخت، بلکه مسائل خاص کشورها را نیز در بر می‌گرفت. برای مثال، هم در بریتانیا و هم در ایتالیا، بحث بر سر این که آیا کتاب «اصول اقلیدس» برای تدریس هندسه مناسب است یا خیر، بسیار مناقشه‌برانگیز شده بود. در اوایل دهه ۱۸۷۰، AIGT (انجمن بهبود آموزش هندسه^۱) برای رسیدگی و به چالش کشیدن سنت استفاده از تمرین‌های تکراری برای امتحانات ورودی در دانشگاه‌های بریتانیا، تأسیس شد. در پی این مباحث، برای کتاب‌های درسی جایگزین‌های متعددی پیشنهاد شد و تغییراتی نیز در آزمون‌های ورودی صورت گرفت. اما در سال ۱۹۰۱ سخنان سخنان مدعو «انجمن پیشرفت علوم بریتانیا^۲»، جان پری^۳ به‌نوعی بر آموزش ریاضی در سراسر جهان اثر گذاشت. پری به کلیت نظام آموزش ریاضی (در آن زمان) حمله کرد که به ادعای وی ذهن کودکان، علایق آن‌ها، کاربردهای ریاضی و ارتباط و اتصال بین حوزه‌های مختلف ریاضی در آن در نظر گرفته نشده بود. ایده ریاضیات کاربردی پری که برای درس هندسه به‌کار گرفته شد، این بود که در اولین برخورد با هندسه، دانش‌آموزان باید درگیر کار کردن با خط‌کش، پرگار، نقاله، گونیا و قیچی بشوند. در انگلستان، «نهضت پری^۴» باعث بحث‌های زیادی در مورد برنامه درسی ریاضی و نیاز به بازسازی آموزش ریاضی متوسطه شد [۵۰]. این جنبش، بسیاری از کشورهای دیگر را نیز تحت تأثیر قرار داد که از آن جمله می‌توان به ژاپن که پری مدت کوتاهی در آنجا تدریس کرده بود [۸۲]، و ایالات متحده آمریکا اشاره نمود که همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، مور در آنجا استدلال‌ها و ایده‌های پری را در رابطه با آموزش ریاضی پذیرفته بود [۶۷].

^۱Association for the Improvement of Geometrical Teaching ^۲British Association for the Advance-

ment of Science ^۳John Parry ^۴Parry movement

در سال ۱۸۶۷/۱۸۶۸ در ایتالیا، اقتباسی از کتاب *اصول اقلیدس*^۱ به عنوان اولین کتاب درسی ایتالیا پس از اتحاد^۲، منتشر شد. مؤلفان این کتاب، ریاضی دانان مشهوری بودند که از ایده محض بودن هندسه در مقابل انتقادات ابراز شده در ایتالیا و بریتانیا، دفاع می کردند. اصلاح طلبان ایتالیایی بر اهمیت آماده سازی و انتشار راهنماهای مناسب بر اساس روش اقلیدسی تأکید داشتند. در ایتالیا، پژوهش در حوزه هندسه داشت رونق می گرفت و بسیاری از پژوهشگران مهم، در تألیف کتاب های درسی مشارکت داشتند. برای مدارس سطح پایین تر در دوره متوسطه، تدریس هندسه شهودی متداول شد که بر فعالیت های مشاهده ای و تجربی مبتنی بود.

با نزدیک شدن به پایان قرن نوزدهم، در ایالات متحده آمریکا، «کمیتۀ ده نفره» منصوب شد تا توصیه هایی در مورد استاندارد سازی محتوا و روش های برنامه درسی مدارس آمریکا، ارائه کنند [۵۵]. زیر کمیته ریاضی، طیفی از توصیه ها را برای برنامه درسی ریاضی از دوره ابتدایی گرفته تا دبیرستان تولید کرد که می توان آن ها را در واژه های کلیدی زیر خلاصه کرد: «تقویت فعالیت های ذهنی دانش آموزان» و این که «قواعد ریاضی باید به طور استقرایی^۳ به دست آیند، نه به شکلی جزمی.»

یکی از اصلاحات انجام شده در سال ۱۹۰۲ در فرانسه که به طور خاص، هدفش دبیرستان بود، اعلام نیاز نسبت به ضرورت فعالیت های ذهنی جدید بشری از جمله، ریاضی بود. اصلاح طلبان، خواستار واقع گرایی بیشتری در ریاضی مدرسه ای و نشان دادن کاربردهای زیاد تر برای علوم زیستی شدند [۴۲]. یکی از وجوه مهم این اصلاحات، گنجانیدن مقدماتی از حساب دیفرانسیل و انتگرال در دوره متوسطه بود. به یاد داریم که طی این دوره، فرانسه کشوری پیشتاز در آنالیز ریاضی بود.

هم اصلاحات فرانسوی و هم نهضت پری که خواهان تأکید بر ورود درس حسابان به برنامه درسی دوره متوسطه بودند، برای نهضت اصلاحات در آلمان به رهبری کلاین، انگیزه بخش شدند. از جمله اهداف اصلی نهضت اصلاحی کلاین با عبارت کلیدی «استدلال تابعی»، انتقال برخی از مطالب حساب دیفرانسیل و انتگرال دانشگاهی به دوره متوسطه بود. با این حال، محتوای این اصلاحات، محدود به سال های پایانی مدرسه نبود بلکه اصلاحات از پایه های پایین تر شروع می شد و بسیاری از معلمان را درگیر می نمود [۷۷]. در حال حاضر، تأکیدی که بر مفهوم تابع به عنوان سنگ بنای مفهومی آموزش و یادگیری جبر و هندسه می شود، یادآور همان نهضت اصلاحی در آلمان است [۹۶] در آن برنامه به طور خاص، نقش هندسه تحلیلی در مطالعه توابع، خاطرنشان شده بود و در نتیجه، پیوندی بین هندسه و جبر

^۳ منظور استقرای تجربی و از جزء به کل رفتن است.

مدرسه‌ای ایجاد شد. علاوه بر این «برنامه ارلانگر کلاین^۱» که هندسه را به‌مثابه مطالعه خواص ثابت تحت گروهی از تبدیل‌ها توصیف می‌کرد، انگیزه‌ای برای کار عمیق‌تر روی تبدیلات هندسی در تدریس ریاضی فراهم آورد.

پس از آن که کلاین که مؤسس ICMI بود، در سال ۱۹۰۸ به‌عنوان اولین رئیس این کمیسیون برگزیده شد، مروج اصلاحاتی در سطح جهانی و بر اساس ایده‌های اصلاحات آلمانی شد. مقایسه بین‌المللی برنامه‌های درسی که بخشی از برنامه کاری ICMI از آغاز شکل‌گیری آن بود، در راستای ترویج پیشنهاد کلاین بود [۷۸]. اگرچه تمام کشورها در این طرح، فعالانه شرکت نکردند، باز هم بسیاری از آن‌ها، فعالیت‌های چشمگیری جهت اصلاح برنامه‌های درسی خود انجام دادند. به‌گفته شوبرینگ [۷۷]، این کشورها شامل اتریش، بلژیک، دانمارک، فرانسه، آلمان، بریتانیا، مجارستان، سوئد و ایالات متحده آمریکا بودند.

تحلیل محتوای برنامه‌های درسی در کشورهای مختلف، ما را با هاوسون [۵۱] هم‌صدا کرد که تا اواخر دهه ۱۹۵۰، توافق زیادی در این باره وجود داشت که منظور از جبر در برنامه درسی مدرسه‌ای، چیست. در این تعبیر مورد اتفاق از جبر مدرسه‌ای، ابتدا از حروف برای نشان دادن اعداد یا متغیرها استفاده می‌شد. سپس نوبت به ساخت فرمول‌های جبری می‌رسید^۲ و بعد از نوشتن معادلات به‌صورت جبری، به‌ترتیب، فرمول یا راه‌حلی برای معادلات خطی، معادلات درجه دوم، دستگاه معادلات خطی و خواص ریشه‌های معادله‌های درجه دوم و سوم ارائه می‌شد. در مقابل، تفاوت‌های قابل‌توجهی در تدریس هندسه به چشم می‌خورد که ناشی از میزان نزدیکی به اصول اقلیدس، سطح دقت، استفاده از ابزارهای جبری یا تحلیلی، تجربی یا شهودی، استفاده از تبدیل‌های هندسی و توجه به هندسه فضایی بود. با وجود این، در اغلب کشورها این اتفاق نظر وجود داشت که در تدریس هندسه، توجه به تعدادی از قضیه‌های کلاسیک هندسی، ضروری است. این قضیه‌ها شامل قضیه فیثاغورس، قضیه تالس یا تقاطع^۳، قضیه‌های مربوط به دایره و هم‌نهستی‌ها و خواص تشابه بود.

۲.۶. ریاضیات مدرن / جدید. تصور عمومی این است که دومین اصلاحات بین‌المللی در دهه ۱۹۶۰ را جمعی از ریاضی‌دانان تحت نام بورباکی در سال ۱۹۳۲ شکل دادند. علاقه گروه بورباکی به آموزش ریاضی در دهه ۱۹۵۰ آغاز شد، یعنی زمانی که برخی از اعضای آن به کمیسیون جهانی CIEAEM

^۲ منظور نوشتن معادلات به‌صورت جبری است.

(کمیسیون جهانی مطالعه بهبود تدریس ریاضی^۱) پیوستند که توسط کالاب گاتنگو^۲ و با هدف مطالعه و بهبود تدریس ریاضی تأسیس شده بود [۳۰]. این کمیسیون، متشکل از افرادی با پیشینه‌های مختلف بود (ریاضی‌دانان، متخصصان تعلیم و تربیت، روان‌شناسان، معرفت‌شناسان و معلمان متوسطه). اقدامات اصلی CIEAEM در سال‌های اولیه را می‌توان به این صورت خلاصه کرد: مردم‌سالاری کردن ریاضی^۳، روش تدریس فعال^۴، و مشارکت واقعی معلمان. از بین ریاضی‌دانان این گروه پژوهشی، می‌توان به هواداران بورباکی^۵ نظیر ژان دیودونه^۶، گوستاو شوکه^۷، و آندره لیکروویچ^۸ اشاره کرد که هر سه، در کتابی که پیازه^۹ و همکاران [۷۳] نوشتند نیز نقش داشتند که یکی از دو کتاب توسط CIEAEM ویرایش شده بود. در آن کتاب، مؤلفان تصریح کردند که ریاضیات جدید، فرصت‌هایی در رابطه با ایجاد اصلاحات در تدریس ریاضی ایجاد کرده است و دیودونه ادعا کرد که جوهره ریاضی، استدلال کردن با نمادهای انتزاعی است.

نهضت «ریاضی جدید» که در اروپا پدید آمد، با جنبشی که به‌طور موازی در ایالات متحده آمریکا آغاز شد، ریشه‌های مشترک داشت [۶۶]. نهضت ریاضی جدید در اوایل دهه ۱۹۵۰، توسط مکس بربمن^{۱۰} و با تأسیس کمیته ریاضی مدرسه‌ای در دانشگاه ایلینویز^{۱۱} (UICSM) آغاز شد. بلافاصله پس از پرتاب اسپاتنیک^{۱۲} در سال ۱۹۵۷، انجمن ریاضی آمریکا، گروه مطالعاتی ریاضی مدرسه‌ای^{۱۳} (SMSSG) را تشکیل داد تا برنامه درسی جدیدی برای دبیرستان تدوین کند. در سال ۱۹۵۸، ادوارد جی. بگل^{۱۴} که آن زمان در دانشگاه ییل بود، به مدیریت این گروه منصوب شد [۴۳، ۱۰۰]. در بین تعداد بسیار زیاد برنامه‌های درسی که طی دوره ریاضی جدید در ایالات متحده آمریکا پیشنهاد شدند، شاید SMSG اثرگذارترین آن‌ها بود. تجارب این گروه و گروه‌های متعدد دیگری که برای تولید برنامه درسی ریاضی تقریباً در همان زمان شکل گرفته بودند، نشان می‌داد که همگی از علم روان‌شناسی بهره برده‌اند [۵۵].

^۵ اعضای گروه بورباکی آن چنان نسبت به آن تعصب داشتند که آن را به‌مثابه یک نحله ایدئولوژیک یا یک حزب سیاسی می‌دانستند و به این دلیل، به هوادارانش، Bourbakists می‌گفتند که در میان آن‌ها، این سه از همه معروف‌تر، یعنی متعصب‌تر یا وفادارتر به گروه بودند.
^{۱۲} اسپاتنیک، یک مجموعه سه‌تایی از ماهواره‌ها بود که اولین ماهواره در ۴ اکتبر ۱۹۵۷ توسط اتحاد جماهیر شوروی سابق، از پایگاه فضایی بایکونور به مدار زمین پرتاب شد. پرتاب اسپاتنیک به مدار زمین، آغازگر عصر فضا و مسابقه فضایی بود. اسپاتنیک معادل روسی کلمه مسافر است.

^۱Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques

^۲Caleb Gattengo ^۳ Democratization of Mathematics ^۴Active Pedagogy ^۵Jean Dieudonné

^۶Gustave Choquet ^۸André Lichnerowicz ^۹Piaget ^{۱۰}Max Beberman ^{۱۱}Illinois Committee

on School Mathematics ^{۱۳}School Mathematics Study Group ^{۱۴}Edward G. Begle

تمام این جریان‌های مختلف اصلاحات مربوط به ریاضیات مدرن یا جدید، در سال ۱۹۵۹ در یک کنفرانس جهانی که در رویامونت^۱ در نزدیکی پاریس برگزار شد، گرد هم آمدند. این کنفرانس توسط OEEC (سازمان همکاری اقتصادی اروپا)^۲ سازماندهی شد و مارشال استون^۳ رئیس وقت ICMI ریاست آن را به عهده داشت. اعضای CIEAEM خصوصاً دیودونه که در رابطه با گذار از مدارس متوسطه به دانشگاه سخنرانی کرد، نقش مهمی ایفا کردند. دیودونه معتقد بود که شروع آموزش هندسه (در دوره متوسطه) باید از اعداد حقیقی باشد. سپس با ایجاد قواعدی برای انجام عملیات روی مجموعه‌ای از اشیاء تعریف نشده^۴ پیش می‌رود تا یک ساختار فضای برداری ایجاد شود. پس از آن، روابط طولی به کمک ضرب اسکالر، معرفی می‌شوند. تمام هندسه اقلیدسی را می‌توان در سه درس به روش اصل موضوعی، ارائه کرد. در این شیوه ارائه هندسه، ویژگی‌های مثلث‌ها نقشی ندارند (OEEC، ۱۹۶۱).

اشاره کردیم که در همان سال یعنی ۱۹۵۹، کنفرانس وودز هول^۵ با هدف کلی‌تر بهبود آموزش علوم، در ایالات متحده آمریکا برگزار شد و در آن دانشمندان، ریاضی‌دانان، روان‌شناسان و بقیه گرد هم آمدند [۱۷].

اگرچه هدف کنفرانس رویامونت، تحقق اصلاحات برنامه درسی ریاضی در اروپا بود، چون ایالات متحده آمریکا و کانادا هم برای شرکت در آن دعوت شده بودند، می‌شود استدلال کرد که اصلاحات بین‌المللی فراتر از کشورهای اروپایی، مورد نظر بود. نتیجه عملی این کنفرانس این بود که در سال ۱۹۶۲ در دو بروونیک^۶ یوگسلاوی، گروهی^۷ از خبرگان جمع شدند تا برنامه پیشرفته‌ای برای تدریس ریاضی در دوره متوسطه، تولید کنند. در این کمیسیون، یک برنامه درسی هندسه برای دانش‌آموزان گروه سنی ۱۵-۱۸ تولید شد. در آن برنامه، صفحه مختصات دکارتی به عنوان یک فضای برداری دوجیبی با ضرب اسکالر، تعریف شد. همسو با پیشنهادهای شوکه^۸ (OEEC، ۱۹۶۲)، قرار شد که این مفاهیم از طریق اصول موضوع معرفی شوند. با وجود این، برای کودکان ۱۱ تا ۱۵ ساله، در راستای پیشنهادهای ریاضی‌دان بلژیکی، پل لیبوا^۹، رویکرد شهودی‌تری برای تدریس هندسه توصیه شد. در برنامه‌ای که به جبر مربوط می‌شد، محتوا شامل مجموعه‌ها، توابع و کاربردها، مقدمه‌ای بر اعداد حقیقی، آشنایی با نظریه اعداد، ترکیبیات، گروه‌ها و ساختارها، عملگرهای خطی و ماتریس‌ها بود که برخی از این‌ها، به مباحث استاندارد در بسیاری از برنامه‌های درسی تبدیل شده است. مضمون اصلی هماهنگ‌کننده در این برنامه‌ها، نظریه

^۷ در قالب یک کمیسیون

^۱Royaumont ^۲Organisation for European Economic Co- operation ^۳Marshall Stone ^۴A set of undefined objects ^۵Woods Hole Conference ^۶Dubrovnic ^۸Choquet ^۹Paul Libois

مجموعه‌ها بود که به شدت، زبان به کار رفته در کتاب‌های درسی را که برای ریاضی جدید نوشته شدند، تحت تأثیر قرار داد.

هم در اروپا و هم در ایالات متحده آمریکا، مسیر نوآوری از دانشگاه آغاز می‌شد و بعد، به دوره متوسطه و سپس ابتدایی، پس می‌رفت. نظریه مجموعه‌ها در تمام سطوح آموزشی حضور داشت و برای مثال، جنبه‌های شمارشی و ترتیبی^۱ اعداد طبیعی از همان پایه‌های اول دوره ابتدایی، معرفی شدند. در بسیاری از کشورها، برنامه‌های درسی ریاضیات جدید به‌طور رسمی، به تصویب رسیدند. نسخه تصویب شده این برنامه‌ها در فرانسه و بلژیک کاملاً در راستای دیدگاه‌های گروه بورباکی بود.

اگرچه نهضت‌های مربوط به ریاضی مدرن/جدید، خیلی زود موجب برانگیختن نقدهای قوی شد (برای مثال [۱، ۵۹، ۹۳])، همین مباحثه‌های فراوان در مورد تغییرات ریاضیات مدرسه‌ای، سکوی پرتابی برای انجام اصلاحات منسجم‌تر بعدی در دهه ۱۹۶۰ میلادی شد. در بریتانیا، «پروژه ریاضی مدرسه^۲» در سال ۱۹۶۱ آغاز شد و تلاش‌های ادیت بیگز^۳ و «پروژه نافیلد^۴»، باعث محبوبیت استفاده از مواد ملموس و روش‌های آزمایشگاهی در برنامه‌های ریاضی مدارس دوره ابتدایی در بریتانیا شدند. در سال ۱۹۶۷، «کمیته اسکاندیناوی برای نوسازی ریاضیات مدرسه‌ای^۵» (شامل کشورهای دانمارک، فنلاند، نروژ، و سوئد) با الهام از ریاضی جدید، یک ریزمواد^۶ جدید تهیه کردند. یکی از شناخته‌شده‌ترین اعضای این کمیته، بنت کریستیانسن^۷ دانمارکی بود. در سال ۱۹۶۸، «مرکز آموزش ریاضی^۸» کارلسروهه توسط هانس گورگ اشتاینر^۹ و هاینز کانل^{۱۰}، در شهر کارلسروهه^{۱۱} در آلمان تأسیس شد. به دنبال آن، در سال ۱۹۷۳، «مؤسسه آموزش ریاضی» (IDM)^{۱۲} در بیله‌فلد توسط اشتاینر، مایکل اوتته^{۱۳} و هاینریش بائرسفلد^{۱۴} و با این هدف تأسیس شد که تدریس مدرسه‌ای را با پژوهش نظری ترکیب کند. در سال ۱۹۶۹ در فرانسه، اولین سری «مؤسسات پژوهشی تدریس ریاضی» (IREM)^{۱۵} در لیون، پاریس و استراسبورگ، تأسیس شدند. در اوایل دهه ۱۹۷۰، «گروه مشارکتی برای پژوهش در آموزش ریاضی^{۱۶}»، در مرکز آموزش ریاضی دانشگاه ساوث همپتون با همکاری جفری هاوسون و بریان توایتس^{۱۷} تشکیل شد. در سال ۱۹۷۱، هانس فرودنتال^{۱۸} «مؤسسه توسعه تدریس ریاضی (IOWO)^{۱۹}» را بنا نهاد. ابتکار^۶ Syllabus (به آن، سرفصل دروس نیز گفته می‌شود).

^۱Cardinal and ordinal aspects of natural numbers ^۲School Mathematics Project: SMG ^۳Edith Biggs ^۴Nuffield Project ^۵Nordic Committee for the Modernization of School Mathematics ^۶Bent Christiansen ^۷Zentrum für Didaktik der Mathematik (Centre for the Didactics of Mathematics) ^۸Hans Georg Steiner ^۹Heinz Kunle ^{۱۰}Karlsruhe ^{۱۱}Institut für Didaktik der Mathematik ^{۱۲}Michael Otte ^{۱۳}Heinrich Bauersfeld ^{۱۴}Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques: IREM ^{۱۵}Collaborative Group for Research in Mathematics Education ^{۱۶}Bryan Thwaites ^{۱۷}Hans Freudenthal ^{۱۸}Institut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs: IOWO (Institute for the Development of Mathematics Teaching)

این عمل، ریشه در «گروه کاری ریاضی»^۱ داشت که در سال ۱۹۳۶، توسط تاتیانا ارنفست-آفانسویا^۲ تأسیس شده بود. فرودنتال در نشست‌های این گروه شرکت می‌کرد و در پی آن، اولین گام در ایجاد نهضت «ریاضیات واقعیت-مدار واقع‌گرا» برداشته شد که در آغاز، رهبری آن را فرودنتال بر عهده داشت [۸۶]. مباحثی جدید مانند آن‌هایی که هواداران گروه بورباکی می‌پسندیدند، مثل بردارها، تبدیل‌ها، ماتریس‌ها و نظریهٔ مجموعه‌ها، در برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای در کشورهای متعدد گنجانده شد و تأکید بیشتر بر احتمال و آمار، پیدا کرد. دههٔ ۱۹۷۰، سال‌های باروری پروژه‌های زیادی بود و ارائهٔ ۱۵ پروژه در گزارش سومین کنگرهٔ جهانی آموزش ریاضی^۳ (۳- ICMI) که در سال ۱۹۷۶ در کارلسروههٔ آلمان برگزار شد، گواه این ادعاست. این موارد و تغییرات دیگر در حوزهٔ آموزش ریاضی، در شمارهٔ ویژهٔ مجلهٔ مطالعات آموزشی در ریاضی^۴ با عنوان «تغییرات در حوزهٔ آموزش ریاضی از اواخر دههٔ ۱۹۵۰- ایده‌ها و آگاهی: گزارش ICMI ۵» (۱۹۷۸)، بازگو شده است.

۳.۶. اصلاحات خزنده^۶. علاوه بر این نوآوری‌های قوی در برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای، اصلاحات خزنده‌ای نیز صورت گرفت که هم بر محتوای برنامه و هم بر روش‌های تدریس و یادگیری ریاضی مدرسه‌ای، اثرگذار بود. تحقیقات تجربی روان‌شناسان، ابزارهای کمک آموزشی جدید و نهضت‌های اصلاحی اوایل قرن بیستم، علاقه‌ای در بین ریاضی‌دانان نسبت به آزمایشگاه‌های ریاضی پدید آورد [۱۵] که در آن‌ها، دانش‌آموزان به شکلی فعال، از ابزارهای ترسیمی، ماشین‌های محاسبه و دست‌ورزی‌ها^۷، استفاده می‌کردند. در آغاز قرن بیستم، یک ریاضی‌دان آلمانی به نام پیتر تروتلین^۸ بیش از ۲۰۰ الگوی کمکی برای تدریس هندسه تدوین کرد [۹۷]. در اواسط قرن بیستم، این الگوها توسط سازندگان و تولیدکنندگان مشهوری نظیر لودویگ بریل^۹ (دارمشتات^{۱۰}) و مارتین شیلینگ^{۱۱} (در هاله و بعد لایپزیک^{۱۲}) تولید و توزیع شدند و به‌شکل گسترده‌ای در دانشگاه‌ها و دانشکده‌های فنی آلمان مورد استفاده قرار گرفتند.

پس از جنگ جهانی دوم، استفاده از مواد ملموس در بسیاری از زمینه‌ها، از سر گرفته شد. در سال ۱۹۴۵، سالنامهٔ «شورای ملی معلمان ریاضی» (NCTM)^{۱۳}، به ابزارهای اندازه‌گیری و ترسیمی و ایجاد الگوهای فیزیکی سه‌بُعدی، اختصاص داده شد. یکی از مروجان فعال این حوزه، گاتگنو^{۱۴} بود که فعالیت‌های اولیهٔ CIEAEM را بر استفاده از مواد ملموس متمرکز کرده بود [۴۱]. استفاده از مواد

^۱Mathematics Working Group ^۲Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa ^۳International Congress on Mathematics Education ^۴Educational Studies in Mathematics ^۵Change in Mathematics Education

Since the Late 1950s—Ideas and Realisation: An ICMI ^۶Creeping Reforms ^۷Manipulatives

^۸Peter Treutlein ^۹Ludwig Brill ^{۱۰}Darmstadt ^{۱۱}Martin Shilling ^{۱۲}In Halle and then Leipzig

^{۱۳}National Council of Teachers of Mathematics: NCTM ^{۱۴}Gattegno

ملموس با یک تقدم و تأخر، تأثیرات آموزشی مهمی بر کارهای معلمی با نام اما کاستیل نووا^۱ داشت. همچنین، گاتگنو و زلتان دینیز^۲، ریاضی‌دان و روان‌شناس، به شدت از استفاده از دست‌ورزی‌ها نظیر میله‌های کوپیزنر^۳ و بلوک‌های منطقی^۴ در فعالیت‌های کلاسی، حمایت کردند. حضور دینیز در ICME-۱ در لیون فرانسه در سال ۱۹۶۹، گواهی بر علاقه ICMI به استفاده از مواد ملموس بود.

روان‌شناسان دیگری مثل ژان پیازه، بر این نهضت اثرگذار بودند. ویلمور^۵ [۹۹] و پرایس^۶ [۷۵] به اهمیت این امر در تغییر طرز تفکر در مورد تدریس و یادگیری ریاضی اشاره کردند. لیبوا^۷ از این مواد در اکول دکرولی^۸ در بروکسل استفاده کرد و در بریتانیا، «انجمن معلمان ریاضی^۹» (ATM) به شدت حامی ابتکارات گاتگنو در ارتقای استفاده از مواد ملموس بود. این مواد، به ابزاری برای شهود و آزمایش در کلاس درس تبدیل شدند و محیط مدرسه را برای پذیرفتن نوآوری‌های بعدی در حوزه فناوری ریاضی، آماده کردند [۷۶]. گاتگنو، مؤلف نرم‌افزارهای نوآورانه‌ای برای آموزش مفاهیم مقدماتی شمارش و فیلم‌هایی برای آموزش هندسه بود که در آن‌ها، برخی از مضامین فیلم‌های ژان نیکوله^{۱۰}، بسط داده شده بود [۷۴]. در گزارش «اولین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی» (ICME-۱) که در سال ۱۹۶۹ برگزار شد، شاهد اشاره به بازی‌ها، کاربرگ‌ها، فیلم‌ها، اسلایدهای آموزشی و مواد ملموس برای استفاده در کلاس درس هستیم. موضوع رابطه بین استفاده از این مواد آموزشی با روش‌شناسی جدید فعالیت‌های کلاسی، از جمله کارگروهی و بحث کلاسی، نیز مطرح شد. در آن زمان، رایانه‌ها در حال ورود به مباحث مربوط به آموزش ریاضی بودند. اشاره صریح به نقش رایانه‌ها در ریاضی مدرسه‌ای و به‌ویژه در مورد ریاضی کاربردی، از سوی بریانی تویتس^{۱۱}، یکی از سخنرانان عمومی ICME-۱ صورت گرفت و فردریک پاپی^{۱۲} نیز راجع به «ریزرایانه»‌ها صحبت کرد [۷۲]. علاقه اولیه به جنبه‌های الگوریتمی یا ریاضیات گسسته، جایگاهی برای برنامه‌نویسی به‌عنوان ابزار رسیدن به دقت بیشتر، ایجاد کرد [۴۰].

در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰، توجه به محیط‌های آموزشی یا جهان‌های خرد معطوف شد که نمونه آن،

برنامه «هندسه لاک‌پشت^{۱۳}» بود که توسط سیمور پاپرت^{۱۴}، در ICME-۲ ارائه شد [۴۹، ۷۰، ۷۱]. برای

Emma Castelnuovo^۱ جدیدترین جایزه «کمیسون بین‌المللی تدریس ریاضی» به‌مناسبت بزرگداشت این معلم به نام او، تأسیس شد.

^{۱۳} «هندسه لاک‌پشتی» (Turtle Geometry) مبتنی بر زبان برنامه‌نویسی لوگو (Logo Programming Language) است. در این هندسه، از یک نشانگر که در این برنامه یک لاک‌پشت است، روی یک صفحه مختصات دکارتی استفاده می‌شود. نکته مهم در این نرم‌افزار این است که حرکت لاک‌پشت برداری است، یعنی جهت‌دار است و فاصله، از نقطه آغاز حرکت در نظر گرفته می‌شود.

^۱Zoltan Dienes ^۲Cuisenaire rods ^۳Logic blocks ^۴Willmore ^۵Price ^۶Libois ^۷Ecole Decroly

^۸Association of Mathematics Teacher ^۹Jean Nicolet ^{۱۰}Bryan Thwaites ^{۱۱}Frédérique Papy

^{۱۲}Seymour Papert

تدریس ریاضی نرم‌افزار ارائه می‌شد از جمله نرم‌افزارهای پیشگام در هندسه پویا که به احیای بخش‌هایی از ریاضی مانند اثبات‌ها و هندسه اقلیدسی کمک کردند. فناوری به‌مثابه ابزاری برای تغییر برنامه‌های درسی و عمل تدریس در نظر گرفته شد و فعالیت‌های ریاضی، هم به‌کمک الگوسازی یا پردازش داده‌ها در آمار، و هم توسط آزمایش کردن و تصویرسازی یا تجسم، می‌توانست تقویت شود. پژوهش‌هایی در مورد نقش فناوری و چگونگی به‌کارگیری آن برای تدریس هندسه طراحی و اجرا شد. در این پژوهش‌ها، ابتدا دیدگاه ساخت‌وسازگرایی به مفهوم عام آن، مورد استفاده قرار گرفت. سپس دیدگاه‌های نظری دیگر و به‌طور خاص، دیدگاه تعاملات اجتماعی^۱ که یادگیری طی آن‌ها صورت می‌گرفت، نیز مورد توجه قرار گرفت [۶۱]. استفاده از «نرم‌افزار هندسه پویا^۲» به‌عنوان یک میانجی بین ساخت و سازگرایی و سطوح نظری دیگر، مورد بررسی قرار گرفت و بر نیاز به ساختن^۳ برنامه درسی دقیق، تأکید شد [۱۴].

افزایش قابلیت دسترسی به ماشین حساب‌های معمولی، ماشین حساب‌های علمی و ماشین حساب‌های گرافیکی، موجب شکل‌گیری رویکردهای تجربی جالب در امر تدریس شد. از یک سو، توجه به جنبه‌های الگوریتمی معطوف شده بود [۲۷] و از سوی دیگر، چگونگی پرداختن به بعضی مباحث، مانند بحث تابع، در مدارس متوسطه‌ای که از فناوری جدید استفاده می‌کردند، موضوع تحقیقات قرار گرفت [۴۵]. البته پیش از این، در ICME-۲ که در اکستر برگزار شد، یک گروه کاری به‌طور صریح، به بررسی نقش فناوری در تدریس ریاضی پرداخته بودند. در ICME-۳ در کارلسروهه، پرداختن به فناوری با ارائه پنج فعالیت رسمی، انجام شد. مقاله مروری^۴ ارائه‌شده توسط فی [۳۱] در ICME-۶ در بوداپست، به تشریح پیشرفت‌ها در استفاده از فناوری طی این دوره پیشگامانه اختصاص دارد. اولین شماره از مجموعه مطالعات ICMI که در سال ۱۹۸۴ انجام شد، به «رایانه‌ها و نظریه اطلاعات^۵» اختصاص داشت [۲۱].

۷. از آموزش و ریاضی، تا آموزش ریاضی

۱.۷. ظهور رویکردهای جدید در آموزش ریاضی. در دهه ۱۹۵۰، هم پژوهش در ریاضی تغییر جهت داد، هم نقش ریاضی در جامعه متحول شد. پیشرفت در فناوری و ارتباط سیاست با رقابت‌های فضایی^۶ و پرده آهنین^۷، باعث ارتقای استفاده از ریاضی شد. دولت‌ها، توانمندی در آموزش ریاضی را اشاره به پرواز اسپاتنیک در سال ۱۹۵۷ توسط شوروی سابق و شروع رقابت‌های فضایی بین دو بلوک شرق و غرب دارد. Iron Curtain^۸ «پرده آهنین»، تمثیلی برای تقسیم اروپا به اروپای غربی (متحده آمریکا) و اروپای شرقی (متحده شوروی سابق) بود که بعد از پایان جنگ جهانی دوم و شروع جنگ سرد، اتفاق افتاد و به تدریج با فرو ریختن دیوار برلین در سال ۱۹۸۹، این پرده نازک‌تر شد تا آن که در سال ۱۹۹۱، به تاریخ پیوست.

^۱Social interactions ^۲Dynamic geometry software ^۳Construction ^۴Survey ^۵1st ICMI Study: Computers and Informatics (1984)

به چشم قدرت جهانی می‌نگریستند. در این میان، از مدارس خواسته شد تا آمادهٔ رویارویی با جمعیت به‌سرعت رو به افزایش و مشکلات آموزشی ناشی از آن شوند. با توجه به پیچیدگی مسائل آموزشی در حال بروز، معلوم شد که مطالعهٔ صرف و مقایسهٔ برنامه‌های آموزشی و درسی که جزو فعالیت‌های اصلی ICMI برای شمار می‌آمد، برای مقابله با این وضعیت، کافی نیست. ضروری بود تا رویکردهای نوین به آموزش ریاضی که مناسب شرایط اجتماعی و ریاضی جدید باشند، مورد توجه قرار گیرد [۴۰]. سازمان‌های تازه تأسیس نظیر CIEAEM و گروه‌های برنامه‌ریزی درسی در ایالات متحده آمریکا، بر همکاری بین ریاضی‌دانان، روان‌شناسان، آموزشگران معلمان ریاضی و معلمان ریاضی تأکید داشتند. بدین ترتیب، نیاز به تخصص حرفه‌ای جدیدی حس می‌شد که کریگوسکا^۱ [۶۰]، جنبهٔ اصلی آن را «پژوهش پیشگام^۲» نامید؛ حوزه‌ای پژوهشی که آموزش ریاضی را به‌عنوان یک شاخهٔ علمی مستقل، به رسمیت شناخت.

فروودنتال [۳۳] معتقد بود که تاریخ ثابت کرده است مسائل و مشکلات را نباید صرفاً ناشی از جنبهٔ سازماندهی دانست. به همین دلیل، با پایان گرفتن دههٔ ۱۹۶۰، علایق پژوهشی از مباحث مربوط به برنامه‌های درسی، به سمت مطالعات گسترده‌تر راجع به ابعاد مختلف برنامه‌های درسی، معطوف شد. در نتیجه روندی به سمت گسترش قلمرو مداخله در برنامه‌های درسی آغاز شد که برای مثال می‌توان به تولید برنامهٔ درسی برای دوره‌های پیش‌دبستانی، فنی-حرفه‌ای و آموزش بزرگسالان اشاره کرد. همچنین، ضرورت انجام تحقیقات دقیق‌تر علمی در حوزهٔ آموزش ریاضی، اعلام شد. یک مورد جدی مربوط به اهمیت پژوهش تجربی را بگل در اولین ICME که در سال ۱۹۶۹ برگزار شد، مطرح کرد. بگل که در آن زمان استاد دانشگاه استانفورد بود، در سخنرانی عمومی خود، مقتدرانه از اهمیت روش تحقیق تجربی^۳ سخن گفت. به گفتهٔ بگل [۴]:

«... در تمام بحث‌هایمان، از جنبه‌های یقینی (حقایق^۴) غفلت کرده‌ایم. ... اغلب پاسخ‌هایی که ارائه کرده‌ایم، توجیه تجربی اندکی دارند. تردید دارم که بسیاری از پاسخ‌هایی که برای پرسش‌هایمان در رابطه با آموزش ریاضی ارائه کرده‌ایم، کاملاً غلط باشند. بلکه معتمد آن پاسخ‌ها معمولاً بیش از حد ساده‌انگارانه بوده‌اند و رفتارها و دستاوردهای ریاضی دانش‌آموزان واقعی بسیار پیچیده‌تر از آن است که این پاسخ‌ها به ما باوراندند (ص. ۲۳۳).»

در ایالات متحده آمریکا، علاقه‌مندی نسبت به پژوهش‌های تجربی در حوزهٔ آموزش ریاضی در حال

^۳ روش‌های تجربی (empirical) در علوم تربیتی، همیشه اهمیت داشته و دارند. با این حال، جامعهٔ ریاضی ایران، با خطر استفاده از نام این روش در تحقیقات به‌اصطلاح «آموزش ریاضی» مواجه است که بدون رعایت دقت لازم و نظارت جدی بر چگونگی انجام آن‌ها، می‌رود تا از آموزش ریاضی، چیز دیگری بسازد!

گسترش بود و تا اواسط دهه ۱۹۶۰ چندین کنفرانس در رابطه با اولویت‌های پژوهشی آموزش ریاضی برگزار شد.

در سال ۱۹۶۸ نیز، در درون «جامعه آمریکایی تحقیقات آموزشی»^۱، یک «گروه با علاقه ویژه»^۲ پژوهشی در رابطه با آموزش ریاضی، شکل گرفت [۵۵]. با وجود این که پژوهش‌های تجربی مورد اقبال بسیاری از کشورهای دیگر نبود، اما افزایش تعداد مجله‌ها و مراکز پژوهشی بین‌المللی، این دیدگاه را دستخوش دگرگونی کرد. فر و گلیمان^۳ [۲۹] در کتاب روندهای جدید در آموزش ریاضی^۴ که توسط یونسکو منتشر شد، این موضوع را عنوان کردند:

«هدف اصلی نهضت اصلاح در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در دو دهه اخیر، بهبود عملکرد آموزشی بود. هرچند این نهضت، برای افزایش تعداد یا کیفیت مطالعات پژوهشی در حوزه آموزش ریاضی طراحی نشده بود، به میزان زیادی، افراد را به انجام چنین پژوهش‌هایی ترغیب کرد؛ یکی به این دلیل که از مصلحان برنامه‌های درسی خواسته شده بود تا نشان دهند که کارشان می‌تواند باعث ایجاد تغییراتی در کلاس درس شود؛ دوم به این دلیل که این مصلحان تشخیص داده‌اند که تغییرات آتی در صورتی می‌تواند بهتر مدیریت شود که درک بیشتری از تدریس و یادگیری ریاضی داشته باشیم؛ و سوم به این سبب که هیجان برنامه درسی، بسیاری از پژوهشگران جدید را جذب مطالعه مسائل و مشکلات موجود در آموزش ریاضی کرده است (ص ۱۲۷).»

همچنین تمایل فزاینده‌ای نسبت به پذیرش متخصصان آموزش ریاضی در جامعه دانشگاهی در حال شکل‌گیری بود. در «قطع‌نامه اولین کنگره جهانی آموزش ریاضی»^۵ (۱۹۶۹) این امر مفروض گرفته شده بود که آموزش ریاضی خودش در حال تبدیل شدن به یک علم است و مسائل خاص خود را دارد که با محتوای ریاضی و آموزش [پداگوژی] مربوط‌اند. در این کنگره ICME درخواست شده بود که جایگاهی برای علم جدید آموزش ریاضی در مؤسسه‌های پژوهشی یا دانشگاه‌هایی که دانشکده‌های ریاضی آن‌ها مناسب این رشته هستند، در نظر گرفته شود.

این بحث درباره هویت مستقل آموزش ریاضی یا آموزگاری ریاضی^۶ - اصطلاحی که در بعضی کشورها، بیشتر مورد پسند است - در ICME-۲ که در سال ۱۹۷۲ برگزار شد، ادامه یافت. برای مثال،

^۲ SIG : Special Interest Group در انجمن مطالعات برنامه درسی ایران نیز، چندین «سیگ» یا «گروپ» با همین هدف، ایجاد شده است.

^۱American Educational Research Association: AERA ^۳Glaymann ^۴New Trends in Mathematics Teaching ^۵Resolutions of the First International Congress on Mathematical Education ^۶Didactics of Mathematics

آنا زوفیا کریگوسکا^۱، در «گروه کاری تربیت معلم برای آموزش معلمان آینده^۲ دوره متوسطه» که مسئولیت هماهنگی آن را اشتاینر^۳ به عهده داشت، چهار جنبه از آموزش ریاضی را شناسایی کرد: تحلیل ایده‌های ریاضی، آموزشی، فرهنگی و محیطی مناسب؛ مقدمه‌ای بر پژوهش؛ ماهیت و وضعیت کودک؛ و تجربه عملی [۴۹]. بنت کریستنسن^۴ [۲۰] بین آموزش ریاضی و آموزگاری ریاضی، تمایز قائل شد. از نظر وی، آموزگاری ریاضی فرآیندی تعاملی بین معلمان و دانش‌آموزان کلاس است، در حالی که آموزش ریاضی مطالعه خود این فرآیند است. کریستنسن آموزش ریاضی را یک شأنت علمی جدیدی می‌داند و اشاره نمود که متخصصان این رشته، کسانی که آن‌ها را «آموزشگران ریاضی» می‌نامند، باید به ارائه درس‌های آن بپردازند و نه آموزشگران عمومی.

۲.۷. ابتکارات تازه در آموزش ریاضی. بازنگری در مورد نقش و روش‌های آموزش ریاضی که در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ صورت گرفت، بحث‌های فراگیری را به دنبال داشت که شامل بازنگری در مورد رابطه بین ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی، و برنامه‌ای برای تدوین روش‌های جدید ارتباط بین خود آموزشگران ریاضی بود. دو رئیس ICMI با انرژی خاصی با این مسائل روبه‌رو شدند - هاینریش بنکه^۵ و فرودنتال [۳۹]. بنکه پس از تولد دوباره ICMI در دهه ۱۹۵۰، کوشید تا روابط مدیریتی با ریاضی‌دانان، از جمله مسائل مالی را حل و فصل کند و به دنبال اهداف و حوزه اختیارات جدید برای ICMI بود. اما این کافی نبود: گسست فرهنگی با ریاضی‌دانان ضروری بود و این کار توسط فرودنتال از دو جنبه که مشخصه وابستگی به جامعه ریاضی شناخته می‌شدند، انجام شد: مجله‌ها و کنفرانس‌های ریاضی. فرودنتال هر دو ابتکار را مستقل از IMU (اتحادیه بین‌المللی ریاضی) انجام داد.

مجله تدریس ریاضی که ارگان رسمی ICMI از زمان تأسیس آن بود، در حال تبدیل شدن به مجله‌ای ریاضی بود که در آن، فضایی اندک به مسائل آموزشی اختصاص داشت. از سوی دیگر، مجله‌های حرفه‌ای تدریس ریاضی، محلی بودند و با توجه به مأموریت و چشم‌اندازشان، برای چاپ مقاله‌های پژوهشی درباره آموزش، مناسب نبودند. به همین دلیل در سال ۱۹۶۸، فرودنتال مجله مطالعات آموزشی در ریاضی^۶ (ESM) را تأسیس کرد [۳۶]. به گفته هانا [۴۶] این ابتکار، به گروه‌های دیگر هم انگیزه داد تا مجله‌های پژوهشی در حوزه آموزش ریاضی منتشر کنند. برای مثال

^۲ منظور از «معلمان آینده» prospective همان teachers دانشجو - معلمان هستند که معمولاً دوره‌هایی را که می‌گذرانند، به «دوره‌های قبل از خدمت» معروف‌اند. اگر چه با سیاست‌گذاری‌های جدیدی که از طرف دانشگاه فرهنگیان در حال تدوین است، همه این نام‌ها و اصطلاحات در ایران، ممکن است تغییر یابند.

Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) (اکنون مجله بین‌المللی آموزش ریاضی^۱) ابتدا در سال ۱۹۶۹ منتشر شد (اولین سردبیران آن امانوئل روهل^۲ و اشتاینر بودند) و مجله پژوهش در آموزش ریاضی^۳ (JRME) از سال ۱۹۷۰ منتشر شد (اولین سردبیر آن دیوید سی. جانسون^۴ بود). ESM و مجله‌های معاصر به ابزارهای مهمی بدل شدند که پرسش‌ها، روش‌ها و پژوهش در رشته «آموزش ریاضی» از طریق آن‌ها توسعه یافت، گزارش شد و مورد بحث قرار گرفت.

روش‌های جدید رسیدن به سطح جهانی نیز به توسعه آموزش ریاضی سرعت بخشیدند. ICMI در آغاز شکل‌گیری‌اش، از کنفرانس‌های مهمی حمایت کرد که کنفرانس میلان (۱۹۱۱) و کنفرانس پاریس (۱۹۱۴) را می‌توان مثال زد. اما به دلیل برگزار نشدن کنفرانس‌ها طی جنگ جهانی اول و پس از آن، تنها مکان برنامه‌ریزی شده برای طرح مسائل مربوط به آموزش ریاضی، بخش‌هایی در «کنگره جهانی ریاضی‌دانان» بود که هر چهار سال یک بار برگزار می‌شود. در این کنگره‌ها، بخش‌هایی به آموزش ریاضی اختصاص داده می‌شد که معمولاً فلسفه ریاضی، تاریخ و منطق را نیز در بر می‌گرفت. سازماندهی این موضوعات شکل‌های مختلفی داشت، ولی با هم ارائه شدن یا تفکیک آن‌ها، بستگی به نظر کمیته‌های علمی-اجرایی داشت. در این کنگره‌ها، هیچ‌وقت یک سخنرانی عمومی به آموزش ریاضی اختصاص نیافت. در دهه ۱۹۶۰، نهضت «ریاضیات جدید» باعث تشکیل نشست‌های مهمی در ایالات متحده آمریکا و اروپا شد که تمرکزشان بر پژوهش در آموزش ریاضی بود. ICMI در سازماندهی برخی از این کنفرانس‌ها، با یونسکو همکاری داشت. گاه‌گاهی، طیف مخاطبان گسترش می‌یافت و معلمان را نیز در بر می‌گرفت. فرودنتال، موفق به تثبیت سنت برگزاری کنگره جهانی آموزش ریاضی (ICME) در تاریخ‌های منظم شد. اولین مورد از این کنفرانس‌ها (۱۹۶۹ در لیون)، طبق الگوی سنتی به صورت ارائه چندین سخنرانی، سامان یافت. اما در دومین کنفرانس در اکستر^۵ (بریتانیا) در سال ۱۹۷۲، گروه‌های کاری سازماندهی شدند و پروژه‌هایی با هدف ایجاد فرصت برای بحث راجع به ایده‌ها، ارائه شد. از زمان ICME - ۳ (کارلسروهه، ۱۹۷۶) به بعد، نشست‌های ICME هر چهار سال یک‌بار برگزار می‌شود. همچنین دیدگاه‌های تازه‌ای در نگرش به آموزش ریاضی از درون جامعه ریاضی‌دانان نیز شکل گرفت. جمله پایانی سخنرانی هاسلر ویتنی^۶، ریاضی‌دانی که در سال ۱۹۷۹ به ریاست ICMI رسید، گواهی بر معطوف شدن توجه به یادگیرنده بود:

«ما نیز به فکر کردن در مورد موضوع‌های درسی عادت کرده‌ایم و این که کودکان چطور آن را یاد می‌گیرند. باید کار خود را با کودکان آغاز کنیم تا ببینیم آن‌ها واقعاً چه هستند.»

^۱The International Journal on Mathematics Education (former ZDM) ^۲Emmanuel Röhrli ^۳Journal for Research in Mathematics Education ^۴David C. Johnson ^۵Exter ^۶Hassler Whitney

در ۳ - ICME در کارلسروهه، اولین گروه‌های مطالعاتی وابسته به ICME تأسیس شدند - HPM (گروه بین‌المللی رابطه بین تاریخ و آموزش ریاضی^۱) و PME (گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی^۲) [۳۸]. با تشکیل این گروه‌ها، دوره جدیدی از نشست‌ها^۳ و انتشار منظم گزارش‌های آن‌ها شروع شد. این کار، نشان از سیر تکاملی و پشتیبانی از پژوهشگران حوزه آموزش ریاضی بود.

۸. خوشه‌هایی از مباحث خاص در «دیسپلین» آموزش ریاضی

تا اواسط دهه ۱۹۷۰، تمایلات جدید گفته شده در بخش قبلی، خود را به شکلی واضح‌تر در سطح جهانی، نشان دادند. پس از آن که معلوم شد تلاش برای یافتن سمت و سوی [مناسب] برای آموزش ریاضی، مستلزم چیزی بیش از بحث درباره برنامه‌های درسی به تفکیک پایه‌ها و سطوح مختلف تحصیلی است، در پایان سال ۱۹۷۴، مقامات ICMI با اعضای یونسکو ملاقات کردند تا زمینه را برای تهیه جلد چهارم از مجموعه کتاب‌های روندهای جدید در تدریس ریاضی، فراهم کنند. این کار، گام مهمی در تعمیق بحث‌ها درباره مسائلی بود که پیش از این مطرح شده بودند. هدف از این کار، نه تنها شناسایی مشکلات عمده در زمینه آموزش ریاضی، بلکه هدایت و پایش جهت‌گیری و شدت تغییراتی بود که در حوزه آموزش ریاضی در حال وقوع بودند [۸۹]. روش‌شناسی متناسب با مباحث عمیق در فصل‌های کتاب، منجر به طرح رویکردهای گسترده‌تری نسبت به مشکلات آموزش ریاضی شد [۲۴]. از نتیجه آماده‌سازی دقیق این کتاب، در سومین ICME که در سال ۱۹۷۶ در کارلسروهه برگزار شد، رونمایی شد و این فصلی برجسته در تاریخ آموزش ریاضی به‌شمار می‌آید.

یکی از پیامدهای این رویکرد عمیق این بود که چهارمین جلد از کتاب روندهای تازه، شامل فصل‌هایی بود که به بحث درباره مشکلات مربوط به برنامه‌های درسی در سطوح مختلف اختصاص یافته بودند؛ از جمله می‌توان به آموزش بزرگسالان، تدریس در سطح دانشگاهی و استفاده از فناوری اشاره نمود. این مسائل در سطحی به‌مراتب عمیق‌تر از قبل، مورد بحث قرار گرفتند و تجزیه و تحلیل منتقدانه فرآیند تولید برنامه‌های درسی و مباحث مربوط به ارزشیابی دانش‌آموزان، معلمان و مواد آموزشی، در این کتاب عرضه شد. اهمیت جلوتر رفتن از مباحث مربوط به برنامه‌های درسی، مورد توجه قرار گرفت و از آن، استقبال شد: «تا همین اواخر، هم تحقیق و هم توسعه، تنها بر یکی از دو عامل تعیین‌کننده در فرآیند

^۳ این نشست‌ها شامل کنفرانس، سمینار و همایش هستند و نکته مهم این است که از زمان تشکیل هر کدامشان تا به امروز، با هر تناوبی که در زمان تأسیس برایش در نظر گرفته شده بود، به‌طور منظم برگزار شده است.

یادگیری: دانش‌آموز یا برنامه‌درسی، متمرکز بود و تأثیر معلم یا زمینه کلی تدریس در آن‌ها، نادیده گرفته می‌شد.» [۲] این کتاب همچنین شامل فصلی درباره زندگی حرفه‌ای معلمان ریاضی و فصلی دیگر درباره اهداف آموزش ریاضی بود.

برگزاری سومین ICME در کارلسروهه و انتشار چهارمین جلد از کتاب روندهای تازه، نقطه آغاز شکل‌گیری چندین شاخه تخصصی برای پرداختن به مشکلات خاص آموزش ریاضی در سطح جهانی شد. ما این شاخه‌ها را در بستر سه حوزه دسته‌بندی کرده‌ایم: (الف) ارتباط با روان‌شناسی؛ (ب) مطالعه ابعاد اجتماعی، فرهنگی و سیاسی؛ و (ج) موضوعیت داشتن نظریه‌های آموزش ریاضی.

۱.۸. روان‌شناسی و آموزش ریاضی. از اواخر قرن نوزدهم، یافتن پاسخ برای مسائل مربوط به تدریس و یادگیری ریاضی، در حوزه‌هایی خارج از ریاضی دنبال می‌شده است. تلفیق شایستگی‌های علوم تربیتی مختلف و سایر حوزه‌های علمی دانشگاهی مانند پداگوژی، روان‌شناسی، فلسفه و پزشکی، سهم مهمی در این امر داشته است. کارهایی که در ابتدا در این حوزه انجام شد، به دانش‌آموزان دارای نیازهای خاص مربوط می‌شد. اما خیلی زود آشکار شد که روش‌های به‌کار رفته در این موارد، برای مواجهه با مشکلات مربوط به آموزش و یادگیری کودکان عادی در مدارس ابتدایی نیز مناسب‌اند. محتوای ریاضی مورد بررسی، عمدتاً مربوط به حساب بود، اما استفاده از مواد ملموس، بر تدریس هندسه نیز اثرگذار بود. آموزشگران، به کار آموزش دانشجو - معلمان در مدارس عملی^۱ پرداختند؛ مداری که با هدف آزمایش کردن روش‌های تدریس جدید تأسیس شده و اداره می‌شد. در این مدارس، کار عملی به‌شدت با پژوهش درآمیخته بود و این گونه، دو جریان پژوهشی مختلف در حال نسج گرفتن بود: یکی دغدغه پژوهش در مورد روش‌های تدریس را داشت و دیگری، علاقه‌مند به مشاهده رفتار دانش‌آموزان [حین یادگیری] بود. هر دو جریان، هم ریشه در نظریه‌های یادگیری داشتند که می‌خواست بدانند در ذهن/ مغز یادگیرنده چه می‌گذرد (مثلاً نظریه پیاژه) و هم ریشه در نظریه‌های تدریس داشتند که به بحث درباره رفتارهای کودک حین فرآیند یادگیری می‌پرداخت (مانند نظریه برونر).

^۱ Practice Schools / restorative practice منظور مداری است که در آن، معلمان آینده تحت نظارت مستقیم یک مربی از دانشگاه یا یک مؤسسه آموزش عالی و معلم کلاس در همان مدرسه، به کارآموزی و آموختن «اصول و فنون تدریس» یا به معنای وسیع‌تر، پداگوژی می‌پرداختند. این الگو، یکی از قدیمی‌ترین و مرسوم‌ترین مدل‌های آموزش‌های حرفه‌ای از جمله پزشکی، نظامی، مهندسی و امر تدریس است. این نوع آموزش معمولاً در فضاهای طراحی‌شده و با نظارت و کنترل مسئولان کارآموزی یا کارورزی صورت می‌گیرد و در حوزه‌های مختلف، هر کدام نام متفاوتی دارند. مهم این است که این مدارس، ارتباطی با «مدارس تجربی» که جان دیویی مبتکر و مبلغ آن بود، ندارند. ولی در ایران، عمدی یا سهوی، زمزمه تأسیس مدارس تجربی برای تربیت معلم آینده شنیده می‌شود که منظور مورد اول، یعنی مدارس عملی است و این خلط مطلب، تبعات ناگووار فراوان دارد. همه این‌ها تأکید دوباره‌ای بر ضرورت شناخت تاریخ هر علم است.

تأثیر کارهای متخصصان پداگوژی^۱ و روان‌شناسان بر آموزش ریاضی، احتمالاً در ابتدای قرن نوزدهم و توسط یک آموزشگر سویسی به نام یوهان هاینریش پستالوزی^۲ آغاز شد. کارهای پستالوزی بر تدریس و یادگیری حساب و هندسه در مدارس ابتدایی اروپا ([۲۵، ۵۲]) و ایالات متحده آمریکا [۱۸] اثرگذار بودند. یکی از پیروان وی به نام فردریش فروبل^۳ مؤسس مهد کودک^۴ به صورت یک سازمان در آلمان بود. فروبل دانش‌آموزانش را به یادگیری از طریق بازی و فعالیت‌های دیگر واداشت. او از بلوک‌های چوبی برای تدریس حساب و اشیاء هندسی ملموس برای تدریس هندسه استفاده می‌کرد.

یوهان فردریش هربارت^۵ اندیشمند دیگری بود که بر شیوه تدریس ریاضی در مدارس تأثیر گذاشت. حدود سال ۱۹۰۰، ایده‌های هربارت تدریس در دوره ابتدایی و آموزش معلمان را در کشورهای مختلف تحت تأثیر قرار داد [۵۰]. با وجود این که هربارت، معلمان را به رعایت مراحل تدریس^۶ ترغیب می‌کرد، اما دیدگاه‌هایش در مورد رابطه بین تدریس و یادگیری با چیزی که بعدها به عنوان ساخت‌وسازگرایی شناخته شد، سازگار بوده است. دیدگاه‌های وی همچنین تا حد زیادی مبتنی بر تعامل‌های انسانی و اجتماعی بوده است.

از طرف دیگر، در ایالات متحده آمریکا توسعه علاقه‌مندی به آموزش کودکان متأثر از نوشته‌های جان دیویی^۷ بود. او در سال ۱۹۸۶، در دانشگاه شیکاگو یک مدرسه آزمایشگاهی^۸ تأسیس کرد. دیویی در سال ۱۹۰۴ به دانشگاه کلمبیا رفت و بقیه دوران کاری‌اش را در آنجا سپری کرد. دیویی کل فرآیند یادگیری را در چارچوب عمل می‌نگریست. برای مثال، در مورد یادگیری ریاضی، یکی از فرض‌های اولیه او این بود که کودک در نتیجه حل مسائل عملی، مفهوم کمیت را درک می‌کند [۹۱]. همین ایده یادگیری فعال^۹ در آثار ماریا مونتسوری^{۱۰} مؤسس مدرسه‌ای برای کودکان در رم و اوید دکرولی^{۱۱}، مؤسس «مدرسه آرمیتاژ»^{۱۲}

^۱ در زبان‌های فارسی یا انگلیسی، واژه مناسبی که جامعیت «پداگوژی» را داشته باشد، تقریباً وجود ندارد. به همین دلیل در هر دو زبان از همین واژه لاتین برای اشاره به اصول و فنون تدریس و هر آن چه که در کلاس درس واقع می‌شود تا یادگیری را ارتقاء بخشد، استفاده می‌شود.

^۲ واژه Kindergarten به معنای «باغ کودکان» است و در آمریکا و کانادا با همین نام وارد زبان انگلیسی شده است. مهد کودک یک سازمان مدنی جدید است.

^۳ علت این تذکر آن است که در ظاهر، پیروی از یک دیدگاه سلسله‌مراتبی با روح ساخت و سازگرایی منافات دارد. اما نویسندگان به استناد تاریخ، نشان داده‌اند که وجوه انسانی - اجتماعی و ماهیت تدریسی که هربارت پیشنهاد داده بود، با اصول اساسی ساخت‌وسازگرایی، همسویی قابل ملاحظه‌ای دارد.

^۴ École de l'Ermitage مونتسوری و دکرولی هر دو بر اساس آگاهی و بینشی که نسبت به جسم و روان انسان داشتند، به تربیت کودکان اقدام کردند. به‌طور مشخص دکرولی، مرکزی دور از هیاهوی شهر (که شاید وجه تسمیه «آرمیتاژ» باشد) درست کرد و در آن، به تربیت کودکان «غیرطبیعی» با روش‌هایی که خود ابداع کرده بود و محوریت آن‌ها علائق کودکان ←

^۲Johann Heinrich Pestalozzi ^۳Friedrich Fröbel ^۵Johann Friedrich Herbart ^۷John Dewey

^۸Laboratory school ^۹Active learning ^{۱۰}Maria Montessori ^{۱۱}Ovide Decroly

در بروکسل نیز به چشم می‌خورد. این دو پزشک بودند و روش‌های آموزش آن‌ها ریشه گرفته از کار با کودکان دارای ناتوانی‌های جزئی بود. روش دِکرولی مبتنی بر مشاهده جهان پیرامون بود، اما مونته‌سوری مواد آموزشی خاصی (materiale strutturato) تولید کرد که هدفشان کمک به ایجاد توان یادگیری مستقل در کودکان بود. پس از این دوره، آزمایشگاه‌های روان‌شناسی متعددی اغلب توسط روان‌شناسان نظیر آلفرد بینه^۱، روان‌شناس فرانسوی که به سبب خدماتش در نظریه هوش و آزمون‌سازی شهرت دارد و کلاپارد^۲، عصب‌شناس و روان‌شناس کودک سوئیسی، در اروپا تأسیس شد. در آزمایشگاه‌های بینه و کلاپارد، معمولاً تلاش کودکان برای یادگیری ریاضی مورد مطالعه قرار می‌گرفت.

در ایالات متحده آمریکا، پژوهش در زمینه یادگیری ریاضی توسط ادوارد لی تورندایک^۳ روان‌شناس رفتارگرا که علاقه زیادی به یادگیری ریاضی داشت و ویلیام برونل^۴ معلم، روان‌شناس، آموزشگر ریاضی و روان‌شناس تربیتی صورت گرفت. برونل و تورندایک، با وجود داشتن دیدگاه‌های نظری متفاوت، هر دو معتقد به نهضتی بزرگتر بودند که در پی ایجاد علم آموزش^۵ بود. در سال ۱۹۲۲، تورندایک کتاب روان‌شناسی حساب^۶ خود را منتشر کرد و اندکی بعد نیز، کتاب روان‌شناسی جبر^۷ (۱۹۲۳) را به چاپ رساند. این دو کتاب مبتنی بر نظریه پیوندگرایی^۸ در دیدگاهی «ارتباط‌گرایانه» بودند و قصدشان تقویت مجموعه کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای بود که تورندایک نوشته بود. در مقابل دیدگاه‌های رفتاری‌تر تورندایک، برونل با دنبال کردن ایده‌های استاد راهنمای خود، چارلز اچ. جاد^۹ بر اهمیت «یادگیری معنادار»^{۱۰} در مقابل روش‌های «طوطی‌وار»^{۱۱} تأکید کرد [۵۷].

نظریه‌های روان‌شناسی رفتاری («رفتارگرایی»^{۱۲}) که از طریق آزمایش روی حیوانات توسعه یافته بودند، بعداً طی سال‌های ۱۹۳۰ تا ۱۹۵۰ توسط بوریس فردریک اسکینر^{۱۳} با یادگیری مدرسه‌ای، مرتبط شدند. اسکینر بر «شرطی‌شدن کنشگر»^{۱۴} از طریق «فرآیندهای تقویت»^{۱۵} تأکید کرد که اساس شکل‌گیری رفتار تلقی می‌شوند. طبق نظریه تدریس مبتنی بر رفتارگرایی، تغییر در رفتار می‌تواند از طریق آموزش بود، پرداخت. برای اطلاعات بیشتر به کتاب «بین آموزش و تناسب» با نام و نشان زیر مراجعه کنید:

Depaape, Marc. (۲۰۱۲). Between Educationalization and Appropriation: Selected Writings on the History of Modern Educational Systems. Leuven University Press

^۳ Edward Lee Thorndike در فارسی، این نام به «ثورندایک» ترجمه شده است، در حالی که «تورندایک» به تلفظ انگلیسی آن نزدیک‌تر است.

^{۱۴} Operant conditioning در کتاب‌های روان‌شناسی ترجمه شده به زبان فارسی، از معادل «شرطی‌سازی عامل» نیز استفاده شده است.

^۱ Alfred Binet ^۲ Claparède ^۳ William Brownell ^۴ Science of Education ^۵ Psychology of Arithmetic

^۶ Psychology of Algebra ^۷ Theory of Associations in a "connectivist" perspective ^۸ Charles H. Judd

^۹ Meaningful learning ^{۱۰} Rote ^{۱۱} Behaviourism ^{۱۲} Burrhus Frederic Skinner ^{۱۳} Reinforcement

برنامه‌ریزی شده صورت بگیرد (یا چیزی که بعداً به آن «یادگیری در حد تسلط»^۱ و «یادگیری به‌کمک رایانه»^۲ گفته شد). این ایده‌ها کاربردهای بسیار گسترده‌ای در تدریس ریاضی [۸۴] و به‌ویژه در نظریهٔ هوادار استفادهٔ زود هنگام از رایانه داشتند.

با این حال، عمده‌ترین تأثیر روان‌شناختی بر آموزش ریاضی از جانب روان‌شناس سویسی، ژان پیاژه بود. پیاژه طی مطالعهٔ رفتار کودکان به‌روش بالینی و شناسایی «مراحل شناختی»، روش‌هایی را ابداع کرد که باعث گسترش مباحث مربوط به آموزش ریاضی در دورهٔ ابتدایی شدند. مراحل شناختی پیاژه، موازی با مراحل تدریس جروم برونر در ایالات متحدهٔ آمریکا بود. اما همان‌طور که کیل پاتریک [۵۵] اشاره می‌کند، تنها «پس از ورود روان‌شناسی شناختی در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰، دورانی که مشخصه‌اش، دسترسی به آثار پیاژه از طریق ترجمهٔ انگلیسی آن‌ها و تفسیر مجددشان توسط جروم برونر بود، پژوهشگران آموزش ریاضی توجه عاقلانه‌تری به نظریه‌های روان‌شناختی و همکاری بیشتر با روان‌شناسان نشان دادند» (ص. ۱۸).

از سوی دیگر، هرچند لو سمنوویچ ویگوتسکی^۳ روسی و پیاژه در یک سال متولد شدند، در دههٔ ۱۹۶۰ بود که تأثیر ایده‌های ویگوتسکی بر آموزش ریاضی آغاز شد. این تأخیر، ناشی از ترجمه نشدن آثار وی [به زبان انگلیسی] و فقدان علاقه به دیدگاه اجتماعی در این حوزه بود. دیدگاه‌های ویگوتسکی، به‌ویژه در رابطه با نقش مهم تعامل اجتماعی در جلو راندن یادگیرندگان در میانهٔ «دامنهٔ تقریبی توسعه»^۴ (ZPD) اهمیت بسیاری داشت. از نظر ویگوتسکی، تمام دانش به‌طور اجتماعی ساخته شده و از طریق فرآیندهای مشترکی که یادگیرندگان، تجربه‌های شخصی خود را با هم به اشتراک می‌گذارند، درونی می‌شود. از این ایده چنین نتیجه‌گیری می‌شد که روابط نزدیک و حامیانه، نقش مهمی در رشد دانش فرد دارد. طبق دیدگاه میانجی‌گری فرهنگی، جهان معانی در کودک، با استفاده از ابزارها (مصنوعات) و نشانه‌ها توسعه می‌یابد. طی ۲۵ سال گذشته، نظریهٔ ویگوتسکی به‌طور گسترده‌ای در آموزش ریاضی به‌کار برده شده است و تمرکز بر فعالیت‌های ریاضی گروهی از یادگیرندگان یا دست‌کم دو نفر یادگیرنده به‌جای یک فرد، بوده است [۵].

اندیشمندانی نظیر کالب گاتنگو، زلتان دینز، ریچارد اسکمپ^۵ و افرایم فیشباین^۶، که هم در ریاضی و هم در علوم تربیتی آموزش دیده بودند، سهم مهمی در ایجاد رابطه بین آموزش ریاضی و علوم تربیتی داشته‌اند. کارهای اسکمپ و فیشباین موجب برانگیختن تفکر دربارهٔ نقش عوامل روان‌شناختی در تدریس Mastery learning^۱ در بعضی ترجمه‌های فارسی، از معادل «یادگیری در حد چیرگی» استفاده شده است.

^۱Computer-assisted learning: CAL ^۲Lev Semėnoviĉ Vygotsky ^۳Zone of Proximal development

^۵Richard Skemp ^۶Efraim Fischbein

و یادگیری ریاضی در پایه‌های بالاتر شد. اسکمپ [۸۳] بین درک «ابزاری^۱» و «درک رابطه‌ای^۲»، تمایز قائل شد. از نظر وی، درک ابزاری نتیجه یادگیری مکانیکی قواعد، قضیه‌ها و کاربرد فوری آن‌ها است. در صورتی که درک رابطه‌ای، نتیجه درگیر شدن شخصی یادگیرنده با اشیاء، موقعیت‌ها، مسئله‌ها و ایده‌های ریاضی است. ما مدیون کارهای عمیق فیشباین در مورد تعامل بین شهود و دقت در آموزش ریاضی هستیم [۹۵]. هم اسکمپ و هم فیشباین، جزو مؤسسان «گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی^۳» (PME) بودند. فیشباین اولین رئیس PME و اسکمپ دومین رئیس آن بود. در ۱- ICME میزگردی در مورد مسائل روان‌شناختی در آموزش ریاضی سازماندهی شد که فیشباین آن را اداره می‌کرد و در ICME-۲ نیز با مدیریت وی ادامه یافت. در مقدمه گزارش ۲- ICME هاوسون [۴۹] بر اهمیتی که روان‌شناسی پیازه در رابطه با ریاضی دوره ابتدایی داشت، تأکید کرد. او اشاره کرد که تعداد افرادی که در گروه کاری «روان‌شناسی یادگیری ریاضی^۴» شرکت کرده بودند بیش از تمام گروه‌های کاری دیگر در آن کنگره بوده است. به گفته هاوسون [۴۹] موضوعی که در این دو میزگرد به بحث گذاشته شد، «تمام و کمال، بر آموزش ریاضی، صحنه گذاشت» (ص. ۱۵).

فیشباین در مقدمه «مجموعه مطالعات ICMI^۵» که به سال ۱۹۹۰ منتشر شد، یک تحلیل پژوهشی در حوزه روان‌شناسی آموزش ریاضی برای PME تدوین کرد^۶ و در آن مدعی شد که «مسائل روان‌شناسانه یادگیری و استدلال ریاضی، به‌لحاظ علمی همچنان‌انگیز و در عین حال، واقعاً با آموزش ریاضی مرتبط هستند» (ص. ۴). این جمله، تجلی بیش از یک سده تعامل بین روان‌شناسان و آموزشگران ریاضی است. در حقیقت، اگرچه بسیاری از حوزه‌های دانش نظیر روان‌شناسی، فلسفه، پزشکی، جامعه‌شناسی، زبان‌شناسی و مردم‌شناسی، با آموزش ریاضی پیوند خورده‌اند، اما از نظر مفهومی، حامی اصلی توسعه آموزش ریاضی، روان‌شناسی بوده است.

۲.۸. ابعاد اجتماعی، فرهنگی و سیاسی. در سال ۱۹۷۲، در فصل اختصاص یافته به آموزش ریاضی در جلد سوم روندهای تازه در تدریس ریاضی^۷ [۲۹]، سه حوزه پژوهشی پیشنهاد شد که شامل برنامه‌های درسی، روش‌ها و مواد آموزشی، یادگیری و یادگیرنده، و تدریس و معلمان بود. چهار سال بعد تا زمان برگزاری ICME-۳ در کارلسروهه، در فصل مربوط به همان مبحث در جلد چهارم این کتاب [۲] امکان انجام فعالیت‌های پژوهشی با فهرست کردن پنج حوزه تازه پژوهشی، بسط داده شد.

^۱Instrumental ^۲Relational Understanding ^۳The International Group for the Psychology of Mathematics Education: PME ^۴The Psychology of Learning Mathematics ^۵ICMI Studies Series
^۶Fischbein, E. (1990). Introduction. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (pp. 1-13). Cambridge, UK: Cambridge University Press. ^۷New Trends in Mathematics Teaching

این حوزه‌ها عبارت بودند از بررسی تعامل‌ها، مطالعه وضعیت کلاس‌های درس واقعی، علایق پژوهشی معلمان، توسعه مجموعه^۱ روش‌های پژوهش، و جهت‌گیری نظری. رویدادها و دیدگاه‌های ارائه شده در ICME-۳ در آموزش ریاضی سودمند بودند و باعث اتخاذ دیدگاه‌های جامع‌تری نسبت به آن شدند. همچنین گسترش علائق پژوهشی آینده‌نگر، با درک وسیع‌تری از ابعاد مربوط به جایگاه و نقش ریاضی و آموزش ریاضی در جامعه، همراه بود. در اواخر دهه^{۱۹۷۰}، علاقه رو به رشدی نسبت به اهمیت عوامل اجتماعی، چه در بحث‌های مربوط به نقش ریاضی در برنامه‌های درسی و چه در چگونگی مداخله عوامل اجتماعی و فرهنگی در تدریس و یادگیری ریاضی، به چشم می‌خورد. باور رو به رشدی ایجاد می‌شد مبنی بر این که آموزش ریاضی^۲ «نه تنها باید به شناخت فرآیند تعامل در کلاس درس، بلکه به آموزش ریاضی به‌مثابه جنبه‌ای از رفتارهای اجتماعی نیز بپردازد»؛ یعنی «فرآیند توسعه آموزش ریاضی، در دل توسعه کلیت نظام آموزشی، جای دارد» [۲]. این دیدگاه در جای دیگری نیز ابراز شده بود [۷]. در تمهیداتی که برای ICME-۳ شده بود، دو تمایل قبلی نسبت به این مضمون در کانون توجه قرار گرفت. بازتاب تمایل اول که اوپیراتان دی آمبروسو^۳ [۲۲] از آن دفاع می‌کرد، بر اهداف و مقاصد کلی آموزش ریاضی، دیده شد. تمایل دیگری که بائرسفلد [۲] در کنار موارد دیگر از آن جانبداری می‌کرد، اهمیت مطالعه تعامل‌ها در فرآیند تدریس - یادگیری بود.

در دهه^{۱۹۸۰} این دو حوزه یعنی دیدگاه وسیع در مورد پایگاه‌های فرهنگی و اجتماعی تدریس و یادگیری ریاضی و به‌تبع آن توسعه دامنه پژوهش در آن‌ها، شاهد پیشرفت‌های قابل‌توجهی بودند. شرح اولیه دی‌آمبروسو درباره اهداف آموزش ریاضی که برای ICME-۳ تهیه شده بود، به دیدگاهی گسترده‌تر بدل شد و در سخنرانی عمومی وی در ICME-۵ در آدلاید^۴ ارائه شد [۲۳، ۲۴] و این، اولین باری بود که مفهوم «ریاضیات قومی»^۵ در یک رویداد بزرگ جهانی در آموزش ریاضی، مطرح شد. او پیشنهاد کرد که آموزش ریاضی، باید گوناگونی طرز تلقی‌های فرهنگی و تمایز فرهنگی بین «گروه‌های اجتماعی که ریشه‌های فرهنگی، شیوه‌های تولید و مالکیت، ساختار و تضاد طبقاتی و احساس امنیت و [حفظ] حقوق فردی کاملاً تعریف شده دارند»، در نظر گرفته شود [۲۳]. توجه به شیوه‌های گوناگونی که ریاضی با فرهنگ‌ها و محافل اجتماعی متمایز، آمیخته شده و بازتاب پیامدهای این توجه بر آموزش ریاضی، به تحقیقات پر تب و تاب در این رابطه، دامن زد. این امر موجب شد که بسیاری از این پژوهش‌ها، به بررسی فعالیت‌های ریاضی در زندگی روزانه گروه‌ها و حرفه‌های اجتماعی بپردازند که بهایی به آن‌ها داده

^۱Didactics در بسیاری از کشورهای اروپایی از جمله فرانسه و آلمان، به‌جای Education از Didactics استفاده می‌کنند. در زبان فارسی، این دو واژه که معادل هم هستند، به «آموزش» معروف شده ولی به تناسب، «تعلیم و تربیت» هم گفته می‌شود.

^۱Repertoire ^۲Ubiratán D'Ambrosio ^۴Adelaide ^۵Ethnomathematics

نشده و از ریاضی نهفته در فرهنگ‌های مختلف، پرده‌برداری شود. این نوع پژوهش، موجب برانگیخته شدن مطالعات و تأملات بیشتری بر شیوه‌های آموزشی مرتبط با آن‌ها شد.

تقریباً در همان زمان نیز در اروپا، دو مسیر پژوهشی شکل گرفت که به ابعاد اجتماعی تدریس و یادگیری ریاضی ارج نهاد. بائرسفلد [۳] اثر اولیه خود را در مورد ابعاد اجتماعی «پنهان^۱» در تعامل بین معلم و دانش‌آموزان در کلاس درس ریاضی، منتشر کرد. گی بروسو^۲ [۱۶] نیز در سنت پژوهش در فرانسه غوطه‌ور شد و نظریه‌ای برای توجه به مخاطرات (تله‌ها) تبدیل ریاضیات علمی به دانش ریاضی مدرسه‌ای، تبیین نمود. در سال‌های بعد، هر دو مسیر مطالعاتی، شاهد پیشرفت‌های عمده‌ای بودند. تا پایان دهه ۱۹۸۰، به‌طور پیوسته، نتایج پژوهش‌های انجام شده درباره تأثیر ابعاد اجتماعی و فرهنگی بر برنامه‌های درسی ریاضی و تدریس و یادگیری ریاضی، در نشریه‌های پژوهشی آموزش ریاضی، ارائه می‌شد. استیگ ملین - آلسن^۳ در کتابی که در سال ۱۹۸۷ منتشر کرد، پس از بحث در مورد عدم تطابق بین صلاحیت‌های^۴ ریاضی دانش‌آموزان در مدرسه و زندگی روزانه، استدلال کرد که پژوهشگران حوزه آموزش ریاضی، نیازمند به‌رسمیت شناختن این [واقعیت] بودند که ابعاد سیاسی، به شکلی اجتناب‌ناپذیر، در مرکز تدریس و یادگیری ریاضی قرار داشت [۶۴].

به‌کمک بازاندیشی می‌توان به این مسئله پی برد که سال ۱۹۸۸، سالی کلیدی در توسعه پژوهش در آموزش ریاضی بود. در آن سال، مجله مطالعات آموزشی در ریاضی، شماره ویژه خود را به «مطالعات اجتماعی-فرهنگی در آموزش ریاضی» اختصاص داد. بیشاپ [۹] کتابی هم در این موضوع نوشته بود.^۵ در ۶ - ICME که در بوداپست برگزار شد، «برنامه ویژه روز پنجم درباره ریاضی، آموزش و جامعه»، به «بررسی ابعاد سیاسی آموزش ریاضی» اختصاص یافت [۵۴]. همچنین در سخنرانی عمومی دوازدهمین کنفرانس PME تریزینا نونز^۶، گزارشی پژوهشی ارائه داد که با یک تیم انجام داده بود. این گزارش، جزئیات صلاحیت‌های ریاضی کودکان بی‌سوادی را که به‌عنوان فروشنده دوره‌گرد در خیابان‌های شهرهای برزیل کار می‌کردند، به تصویر کشید [۱۹]. به تعبیر استفان لرمان^۷ [۶۲]، این چرخش اجتماعی، حاکی از «ظهور نظریه‌هایی در جامعه پژوهشی آموزش ریاضی بود که معنا، تفکر و استدلال را، محصول فعالیت‌های اجتماعی تلقی می‌کردند» (ص. ۲۳). می‌توانیم در این چرخش اجتماعی، از منظر آموزشی نیز تحلیل نقش ریاضی و آموزش ریاضی را در جامعه بگنجانیم؛ کاری که طنین بازتاب‌های اولیه دی‌آمبرسیو در

^۴ Competency در بعضی ترجمه‌ها، از معادل «شایستگی» نیز استفاده شده است.

^۱Hidden ^۲Guy Brousseau ^۳Stieg Mellin-Olsen ^۵Bishop, A. J. (1988b). *Mathematical Enculturation. A cultural perspective on Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

^۶Fifth Day Special Programme ^۷Terezinha Nunes ^۸Stephen Lerman

مورد اهداف آموزش ریاضی است [۲۲]. در اواسط دهه ۱۹۹۰، اوله اسکوفس موزا^۱ ([۸۵]) به بحث درباره روابط بین ریاضی، جامعه و شهروندی پرداخت. وی با تأکید بر قدرت ریاضی در جوامع معاصر، پیشنهاد اتخاذ یک موضع انتقادی را در آموزش ریاضی مطرح کرد که در آن، فرصت طرح یک دیدگاه جامع برای پیوند دادن مباحث جهانی شدن، محتوا و کاربردهای ریاضی، به عنوان مبنایی برای کنش‌ها/ عمل‌های اجتماعی و قدرتمند کردن جامعه از طریق سواد ریاضی، فراهم شود.

۹. دغدغه نظریه

درک این نکته که آموزش ریاضی باید به دنبال جایگاهی مناسب در حوزه فعالیت‌های دانشگاهی باشد، پیش از این در آغاز قرن بیستم نیز محسوس بود [۵۵]. یکی از قطع‌نامه‌هایی که در اولین IMCE (۱۹۶۹) به تصویب رسید، مربوط به نیازمندی به یک «نظریه آموزش ریاضی^۲» بود (ص. ۴۱۶). از اواسط دهه ۱۹۷۰ و بعد از ICME-۳ تلاش برای تبیین چنین نظریه‌ای بارزتر شد. استاینر که در IDM در دانشگاه بیله‌فلد مستقر بود، رهبری یک جریان فشار برای تبیین نظریه و بازتاب بر آن را به عهده گرفت. او یک گروه مطالعاتی بین‌المللی به نام نظریه آموزش ریاضی (TME) را تشکیل داد که تا سال ۱۹۹۲ پنج کنفرانس برگزار کرد و گروه ویژه ثابت کنفرانس‌های جهانی بود. مناظره‌هایی توسط این گروه در مورد ماهیت، امکان‌ها، حدود و ثغور و مشروعیت آموزش ریاضی به عنوان یک حوزه علمی، صورت گرفت [۸۸] و بحث‌های قبلی را بسط داد (برای مثال [۴] و [۲]) و پژوهشگران برجسته‌ای را از چندین کشور، درگیر کرد. رابطه بین آموزش ریاضی و سایر حوزه‌های دانش (روان‌شناسی، علوم تربیتی، جامعه‌شناسی، ریاضی و غیره)، قدرت تبیینی پارادایم‌های^۳ رقیب، روایی/ اعتبار^۴ نظریه‌های بومی/ محلی^۵ خانگی، رابطه بین نظریه و عمل و تأملاتی بر تغییرات برنامه‌های درسی، از جمله خدمات متعدد این گروه بود. در دسترس‌ترین تولیدات این گروه، دو کتاب بود که یکی توسط استاینر و فرماندل [۸۹] در مورد اصول و روش‌شناسی آموزش ریاضی تألیف شد و دیگری [۶] ارائه مروری جامع بر آموزش ریاضی از دید سایر آموزشگران ریاضی در جهان بود. چندین کتاب در صدد توجیه تنوع پژوهش در حوزه آموزش ریاضی برآمده‌اند ([۱۲]، [۱۳]، [۲۸]، [۴۴]، [۸۱]) و خصوصاً این کتاب سومین دانشنامه). در تلاش برای توصیف این تنوع، بیشاپ [۱۰، ۱۱] توجه را به سنت‌های پژوهشی معطوف نمود که نتیجه تربیت، پیشینه فرهنگی و آموزش پژوهش^۶ بودند [۱۰]. در سال ۱۹۹۲، بیشاپ سازه^۶ خود را برای توصیف ویژگی‌های سه سنت

^۳Paradigms الگوها، مدل‌ها، نمونه‌های ذهنی و معادل‌های دیگری نیز برای پارادایم انتخاب شده است ولی هیچ‌کدام جامعیت این واژه را ندارند.

مختلف به‌کارگرفت و بعدها از آن به‌عنوان پیشینه‌ای برای بازتاب بر رابطه بین پژوهش و عمل آموزشی، استفاده کرد^۱ [۱۱]. یکی از این سنت‌ها، فنون تدریس یا همان پداگوژی است که به نقش معلمانی ارج می‌نهد که بر عمل تدریس خود بازتاب دارند و مؤلفه‌های کلیدی آن، آزمایش کردن و مشاهده است. نمود سنت تجربی- علمی^۲ را می‌توان در مقاله بگل که در سال ۱۹۶۹ در ICME-۱ ارائه شد، مشاهده کرد و «کلید در گنج دانش و فرآیند پژوهش، متوجه روش‌های کسب شواهد و تحلیل غالباً کمی آن‌ها شد.» [۱۰] مورد سوم، سنت «اندیشمندان فیلسوف - فیلسوفان مدرسی^۳» است که مبتنی بر تجزیه و تحلیل، نظریه‌پردازی منطقی و نقادی است. حقیقت تدریس، تجلی ناقص این پیشنهادهای نظری است.

مراجع

- [1] Ahlfors, L. V., Bacon, H. M., Bell, C., Bellman, R. E., Bers, L., & Birkhoff, G. (1962). On the mathematics curriculum of the high school. *The Mathematics Teacher*, 55, 191-195.
- [2] Bauersfeld, H. (1979). Research related to the mathematical learning process. In H. G. Steiner & B. Christiansen (Eds.), *New trends in mathematics teaching* (Vol. IV, pp. 199-213). Paris, France: UNESCO.
- [3] Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 23-41.
- [4] Begle, E. G. (1969). The role of research in the improvement of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 232-244.
- [5] Berger, M. (2005). Vygotsky's theory of concept formation and mathematics education. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 155-162). Melbourne, Australia: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- [6] Biehler, R., Scholz, R. W., Sträßer, R., & Winkelmann, B. (Eds.). (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [7] Bishop, A. (1979). Editorial statement. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 1.

^۱ در سال ۱۳۷۶ (۱۹۹۷ میلادی) پروفیسور بیشاپ سخنران مدعو دومین کنفرانس آموزش ریاضی بود که در کرمانشاه برگزار شد. در بازگشت به تهران، از ایشان درخواست شد که در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی برای کارشناسان آن دفتر، سخنرانی کنند. عنوان سخنرانی بیشاپ، «سنت‌های تحقیقات آموزشی و توسعه برنامه درسی ریاضی» بود و در آن، به‌طور مشخص این بحث را مطرح کردند. این سخنرانی توسط خانم دکتر زهرا گویا ترجمه می‌شد و نوار آن، به همت خانم دکتر سهیلا غلام آزاد پیاده شد و در مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۵۱، در صفحه‌های ۸ تا ۱۵ به چاپ رسید. از علاقه‌مندان دعوت می‌شود که مشروح این بحث را در آن شماره مطالعه نمایند.

- [8] Bishop, A. J. (Ed.). (1988a). Special issue: Socio-cultural studies in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 19(2), 117–268.
- [9] Bishop, A. J. (1988b). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.
- [10] Bishop, A. J. (1992). International perspectives on research in mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 710–723). New York, NY: Macmillan.
- [11] Bishop, A. J. (1998). Research, effectiveness, and the practitioners' world. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity, An ICMI Study* (pp. 33–45). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [12] Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Laborde, C. (Eds.). (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [13] Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. S. (Eds.). (2003). *Second international handbook of mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [14] Borba, M., & Bartolini Bussi M. G., (2008). Report of the Working Group 4. Resources and technology throughout the history of ICMI. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction. Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 289–300). Roma, Italy: Istitutedella Enciclopedia Italiana.
- [15] Borel, E. (1904). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. *Revue Générale des Sciences*, 10, 431–440.
- [16] Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- [17] Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- [18] Cajori, F. (1890). *The teaching and history of mathematics in the United States*. Washington, DC: Government Printing Office.
- [19] Carraher, T. (1988). Street mathematics and school mathematics. In A. Borbás (Ed.), *Proceedings of the twelfth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1–23). Veszprém, Hungary: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

- [20] Christiansen, B. (1975, January). European mathematics education—The future. Paper presented at the Sixth Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers.
- [21] Churchhouse, R. F., Cornu, B., Howson, A. G. Kahane, J.-P., van Lint, J. H., Pluvinage, F., Ralston, A., & Yamaguti, M. (1986). The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching. ICMI Study series. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [22] D'Ambrosio, U. (1979). Overall goals and objectives for mathematical education. In H. G. Steiner & B. Christiansen (Eds.), *New trends in mathematics teaching* (Vol. IV, pp. 180–198). Paris, France: UNESCO.
- [23] D'Ambrosio, U. (1985). Sociocultural basis for mathematics education. In M. Carss (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematics Education* (pp. 1–6). Boston, MA: Birkhäuser.
- [24] D'Ambrosio, U. (2007). The role of mathematics in educational systems. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39, 173–181.
- [25] De Moor, W. A. (Ed.). (1995). Vormleer—An innovation that failed. *Paedagogica Historica*, 31(1), 103–113.
- [26] Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (2005). A mathematics education ghost story: Herbartianism and school mathematics. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice—Proceedings of the annual conference of the Mathematics Education Group of Australasia*, Melbourne (pp. 313–321). Sydney, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- [27] Engel, A. (1977). *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt*. Stuttgart, Germany: E. Klett Verlag.
- [28] English, L. D. (Ed.). (2002). *Handbook of international research in mathematics education*. Mahlab, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [29] Fehr, H. E., & Glaymann, M. (Eds.). (1972). *New trends in mathematics teaching* (Vol. III). Paris, France: UNESCO.
- [30] Félix, L. (1985). Essai sur l'histoire de la CIEAEM. In J. de Lange (Ed.), *Mathématiques pour tous... à l'âge de l'ordinateur* (pp. 375–378). Utrecht, The Netherlands: OW & OC.
- [31] Fey, J. T. (1989). Technology and mathematics education: A survey of recent developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 237–272.

- [32] Fischbein, E. (1990). Introduction. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1–13). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [33] Freudenthal, H. (1963). Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement modernes des mathématiques? *L'Enseignement Mathématique*, 2(9), 28–44.
- [34] Furinghetti, F. (2003). Mathematical instruction in an international perspective: The contribution of the journal *L'Enseignement Mathématique*. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson, & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of L'Enseignement Mathématique*, Monographie 39 de L'Enseignement Mathématique (pp. 19–46). Geneva, Switzerland: International Commission on Mathematical Instruction.
- [35] Furinghetti, F. (2007). Mathematics education and ICMI in the proceedings of the International Congresses of Mathematicians. *Revista Brasileira de História da Matemática Especial no 1—Festschrift Ubiratán D'Ambrosio*, 97–115.
- [36] Furinghetti, F. (2008). Mathematics education in the ICMI perspective. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 3(2), 47–56.
- [37] Furinghetti, F. (2009). The evolution of the journal *L'Enseignement Mathématique* from its initial aims to new trends. In K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, & G. Schubring (Eds.), “Dig where you stand”: Proceedings of the conference on “On-going Research in the History of Mathematics Education” (pp. 31–46). Reykjavik, Iceland: University of Iceland.
- [38] Furinghetti, F., & Giacardi, L. (2008). The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). The history of ICMI. Retrieved from <http://www.icmi-history.unito.it/>
- [39] Furinghetti, F., & Giacardi, L. (2010). People, events, and documents of ICMI's first century. *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica, nova època*, 3(2), 11–50.
- [40] Furinghetti, F., Menghini, M., Arzarello, F., & Giacardi, L. (2008). ICMI renaissance: The emergence of new issues in mathematics education. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction. Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 131–147). Roma, Italy: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- [41] Gattegno, C., Servais, W., Castelnuovo, E., Nicolet, J. L., Fletcher, T. J., Motard, L., Campedelli, L., Biguenet, A., Peskette, J. W., & Puig Adam, P. (1958). *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*. Neuchâtel, Switzerland: Delachaux & Niestlé.

- [42] Gispert, H. (2009). Two mathematics reforms in the context of twentieth century France: Similarities and differences. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 4, 43–50.
- [43] Griffiths, H. B., & Howson, A. G. (1974). *Mathematics, society and curricula*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [44] Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, NY: Macmillan.
- [45] Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Eds.). (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators*. New York, NY: Springer.
- [46] Hanna, G. (2003). Journals of mathematics education, 1900–2000. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson, & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of L'Enseignement Mathématique*, Monographie 39 de L'Enseignement Mathématique (pp. 69– 84). Geneva, Switzerland: International Commission on Mathematical Instruction.
- [47] Hanna, G., & Sidoli, N. (2002). The story of ESM. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 123–156.
- [48] Hodgson, B. R. (2009). ICMI in the post-Freudenthal era: Moments in the history of mathematics education from an international perspective. In K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, & G. Schubring (Eds.), “Dig where you stand”: Proceedings of the conference on “On- going research in the History of Mathematics Education” (pp. 79–96). Reykjavik, Iceland: The University of Iceland.
- [49] Howson, A. G. (Ed.). (1973). *Developments in mathematical education*. Proceedings of the Second International Congress on Mathematics Education. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [50] Howson, A. G. (1982). *A history of mathematics education in England*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [51] Howson, A. G. (2003). Geometry: 1950–70. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson, & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of L'Enseignement Mathématique*, Monographie 39 de L'Enseignement Mathématique (pp. 115–131). Geneva, Switzerland: International Commission on Mathematical Instruction.
- [52] Howson, A. G. (2010). Mathematics, society, and curricula in nineteenth-century England. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 5(1), 21–51.

- [53] Karp, A., & Schubring, G. (Eds.). (in press). Handbook on history of mathematics education. New York, NY: Springer.
- [54] Keitel, C., Damerow, P., Bishop, A., & Gerdes, P. (Eds.). (1989). Mathematics, education, and society. Paris, France: UNESCO.
- [55] Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 3–38). New York, NY: Macmillan.
- [56] Kilpatrick, J. (1994). History of mathematics education. In T. Husén & T. N. Postlethwaite (Eds.), International encyclopedia of education (2nd ed., pp. 3643–3647). Oxford, UK: Pergamon.
- [57] Kilpatrick, J., & Weaver, J. F. (1977). The place of William A. Brownell in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 382–384.
- [58] Klein, F. (1923). Göttinger Professoren. Lebensbilder von eigener Hand. 4. Felix Klein, *Mitteilungen des Universitätsbundes Göttingen*, 5, 24.
- [59] Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: The failure of the new mathematics*. New York, NY: St. Martin's Press.
- [60] Krygowska, A. Z. (1968). Méthodologie de l'enseignement des mathématiques sujet d'étude au niveau supérieur. In N. Teodorescu (Ed.), Colloque International UNESCO "Modernization of mathematics teaching in European countries" (pp. 435–448). Paris, France: UNESCO.
- [61] Laborde, C. (2008). <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG4/Papers/LABORD.pdf> Retrieved 20 July 2011.
- [62] Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). London, UK: Ablex Publishing.
- [63] Mathematical Association. (1913). Catalogue of current mathematical journals, etc. with the names of the libraries in which they may be found compiled for The Mathematical Association. London, UK: G. Bell & Sons.
- [64] Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.
- [65] Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L., & Arzarello, F. (Eds.). (2008). *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Rome, Italy: Istituto della Enciclopedia Italiana.

- [66] Moon, B. (1986). The “new maths” curriculum controversy: An international story. London, UK: Falmer Press.
- [67] Moore, E. H. (1903). The foundations of mathematics (Presidential Address at the Annual Meeting of the American Mathematical Society, New York, 1902). *Bulletin of the American Mathematical Society*, 9, 402–424.
- [68] Nabonnand, P. (2007). Les réformes de l’enseignement des mathématiques au début du XXe siècle. Une dynamique à l’échelle internationale. In H. Gispert, N. Hulin, & M.-C. Robic (Eds.), *Science et enseignement* (pp. 293–314). Paris, France: INRP-Vuibert.
- [69] Organisation for European Economic Co-operation (OECE) (1961). *Mathématiques nouvelles*. Paris, France: Author. Organisation for European Economic Co-operation (OECE) (1962). *Un programme moderne de mathématiques pour l’enseignement secondaire*. Paris, France: Author.
- [70] Papert, S. (1972a). Teaching children thinking. *Mathematics Teaching*, 58, 2–7.
- [71] Papert, S. (1972b). Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 3, 249–262.
- [72] Papy, F. (1969). *Minicomputer*. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 333–345. Pellerey, M. (1989). *Oltre gli insiemi*. Napoli, Italy: Tecnodid.
- [73] Piaget, J., Beth, E. W., Dieudonné, J., Lichnerowicz, A., Choquet, G., & Gattegno, C. (1955). *L’enseignement des mathématiques*. Neuchâtel, Switzerland: Delachaux et Niestlé.
- [74] Powell, A. B. (2007). Caleb Gattegno (1911–1988): A famous mathematics educator from Africa. *Revista Brasileira de História da Matemática Especial no 1—Festschrift Ubiratan D’Ambrosio*, 199–209.
- [75] Price, M. (1995). The AMT and the MA: A historical perspective. *Mathematics Teaching*, 150, 6–11. *Resolutions of the First International Congress on Mathematical Education (1969)*. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 416.
- [76] Ruthven, K. (2008). Mathematical technologies as a vehicle for intuition and experiment: A foundational theme of the International Commission on Mathematical Instruction, and a continuing preoccupation. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 3(1), 91–102.
- [77] Schubring, G. (2000). The first international curricular reform movement in mathematics and the role of Germany—A case study in the transmission of concepts. In A. Gagatsis, C. P.

- Constantinou, & L. Kyriakides (Eds.), Learning and assessment in mathematics and science (pp. 265–287). Nicosia, Sicily: Department of Education, University of Cyprus.
- [78] Schubring, G. (2003). L'Enseignement Mathématique and the first International Commission (IMUK): The emergence of international communication and cooperation. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson, & G. Schubring (Eds.), One hundred years of L'Enseignement Mathématique, Monographie 39 de L'Enseignement Mathématique (pp. 49–68). Geneva, Switzerland: International Commission on Mathematical Instruction.
- [79] Schubring, G. (2008). The origins and early incarnations of ICMI. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education (pp. 113–130). Rome, Italy: Istituto della Enciclopedia Italiana. See also: The origins and the early history of ICMI. International Journal for the History of Mathematics Education, 3(2), 3–33.
- [80] Schubring, G., & Richter, J. (1980). International bibliography of journals in mathematics education. Schriftenreihe des IDM 23/1980. Bielefeld, Germany: IDM.
- [81] Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (Eds.). (1998). Mathematics education as a research domain—A search for identity: An ICMI Study. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [82] Siu, M. K. (2009). Mathematics education in East Asia from antiquity to modern times. In K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, & G. Schubring (Eds.), “Dig where you stand”: Proceedings of the conference on “On-going research in the History of Mathematics Education” (pp. 197–208). Reykjavik, Iceland: University of Iceland.
- [83] Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching, 77, 20–27.
- [84] Skinner, B. F. (1954). The science of learning and the art of teaching. Harvard Educational Review, 24(2), 86–97.
- [85] Skovsmose, O. (1994). Towards a philosophy of critical mathematics education. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [86] Smid, H. (2009). Foreign influences on Dutch mathematics teaching. In K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, & G. Schubring (Eds.), “Dig where you stand”: Proceedings of the “Conference on On-going Research in the History of Mathematics Education” (pp. 209– 222). Reykjavik, Iceland: The University of Iceland.

- [87] Smith, D. E. (1905). Opinion de David Eugene Smith sur les réformes à accomplir dans l'enseignement des mathématiques. *L'Enseignement Mathématique*, 7, 469–471.
- [88] Steiner, H.-G., Balacheff, N., Mason, J., Steinbring, H., Steffe, L. P., Brousseau, G., et al. (Eds.). (1984). *Theory of mathematics education (TME)*. Bielefeld, Germany: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.
- [89] Steiner, H. G., & Christiansen, B. (Eds.). (1979). *New trends in mathematics teaching (Vol. IV)*. Paris, France: UNESCO.
- [90] Steiner, H.-G., & Vermandel, A. (Eds.). (1988). *Foundations and methodology of the discipline of mathematics education (didactics of mathematics)*. Proceedings of the 2nd TME Conference. Bielefeld, Germany: University of Bielefeld and University of Antwerp.
- [91] Stemhagen, K. (2008). Doin' the Math: On meaningful mathematics-ethics connections. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 5(1), 59–66.
- [92] Struik, D. J. (1987). *A concise history of mathematics (4th ed.)*. New York, NY: Dover Publications.
- [93] Thom, R. (1973). Modern mathematics. Does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education*. In Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education (pp. 194–209). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [94] Thwaites, B. (1969). The role of the computer in school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 346–359.
- [95] Tirosh, D., & Tsamir, P. (2008). Intuition and rigor in mathematics education. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction. Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 47–61). Roma, Italy: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- [96] Törner, G., & Sriraman, B. (2005). Issues and tendencies in German Mathematics-didactics: An epochal perspective. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 197–202)*. Melbourne, Australia: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- [97] Treutlein, P., & Wiener, H. (1912). *Verzeichnis mathematischer Modelle*. Sammlungen H. Wiener und P. Treutlein. Leipzig – Berlin, Germany: B. G. Teubner.
- [98] Whitney, H. (1983). Are we off the track in teaching mathematical concepts? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematics education* (pp. 283–296). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

- [99] Willmore, T. (1972). The mathematical societies and associations in the United Kingdom. *The American Mathematical Monthly*, 79(9), 985–989.
- [100] Wooton, W. (1965). *SMSG. The making of a curriculum*. New Haven, CT: Yale University Press.

زهرا گويا: دانشگاه شهيد بهشتی، دانشکده علوم ریاضی
رایانامه: zahra_gooya@yahoo.com
امیرحسین آشنا: تهران، دانشکده رفاه، گروه آموزش ریاضی
رایانامه: ahashna@yahoo.com